ON THE COHOMOLOGY OF IMPOSSIBLE FIGURES

LA COHOMOLOGIE DES FIGURES IMPOSSIBLES

Roger Penrose
Mathematical Institute
Oxford, U.K.

ABSTRACT

The close relationship between certain types of impossible figure and the mathematical idea of cohomology is explained in relation to the tribar and to another type of impossible figure related to the Necker cube.

RÉSUMÉ

On explique ici le lien étroit entre certains types de figures impossibles et la notion mathématique de cohomologie en relation avec la tripoutre et avec un autre type de figures impossibles lié au cube de Necker.

In a recent article [3], presented in honour of M.C. Escher, I hinted at a relationship between cohomology and certain types of impossible figure. It is the purpose of this note to explain this relationship more fully.

I shall be concerned with the concept of **first** cohomology group

$$H^1(Q,G)\,; \qquad (1)$$

the basic meaning of this concept should emerge during the course of the discussion. Here Q is some (non-simply-connected) region of the plane—which I shall take to contain the "support" (i.e. the region of the plane where the drawing occurs) of some impossible figure—and G is a (normally Abelian) group which I shall refer to as the **ambiguity group** of the figure. (For those readers not familiar

Dans un récent article [3], dédié à la mémoire de M.C. Escher, j'avais fait allusion à un lien entre la cohomologie et certains types de figure impossible. Je compte expliquer ici ce lien plus en détail.

Je m'intéresserai au concept de **première** cohomologie

$$H^1(Q,G)\,; \qquad (1)$$

la signification fondamentale de ce concept devrait émerger à la lecture du texte. Ici, Q est une certaine région (non simplement connexe) du plan — qui contiendra le «support» (c'est-à-dire, la région du plan où le dessin apparaît) d'une figure impossible — et G est un groupe (normalement abélien) que je nommerai **groupe d'ambiguïté** de la figure. (Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers avec la notion mathématique de groupe, on peut spécifier que G est tout

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

with the mathematical concept of a group, it may be taken that G is just some set of numbers closed under multiplication and division. Thus if a and b belong to G, then so do ab and a/b.) To fix ideas, let us consider two examples. The first is the tribar, illustrated in **Figure 1**. Here, Q can be taken to be, say, the region of the plane (paper) on which the tribar is actually drawn, or else some slightly larger region such as the annular region depicted in **Figure 2**. In the second example, illustrated in **Figure 3**, I have drawn a version of the impossible figure that I introduced in my earlier article.

Consider first the tribar. We may regard the region Q as being pasted together from three smaller regions Q_1, Q_2, Q_3, as indicated in **Figure 4**. There are overlapping parts of Q_1, Q_2, Q_3, which are to be pasted together.

The drawing on each of Q_1, Q_2, Q_3, is a perfectly consistent rendering of a three-dimensional structure which is unambiguous in its natural interpretation—except for the essential ambiguity present in

simplement un certain ensemble de nombres fermé sous la multiplication et la division. Ainsi, si a et b appartiennent à G, alors il en va de même de ab et de a/b.). Pour y voir plus clair, considérons deux exemples. Le premier est la tripoutre dont l'illustration est à la **figure 1**. Ici, Q peut être considéré comme, disons, la région du plan (papier) sur laquelle la tripoutre est réellement dessinée, ou une région légèrement plus grande comme la région annulaire décrite à la **figure 2**. Dans le second exemple, illustré à la **figure 3**, j'ai dessiné une version d'une figure impossible déjà présentée dans mon article précédent.

Considérons, tout d'abord, la tripoutre. On peut considérer la région Q comme le résultat du collage de trois régions plus petites, Q_1, Q_2, Q_3, comme l'indique la **figure 4**. On doit coller les parties de Q_1, Q_2 et de Q_3 qui se chevauchent. Les dessins apparaissant sur Q_1, Q_2 et Q_3 sont des reflets parfaitement logiques de structures tridimensionnelles et sont vides d'ambiguïté dans leur interprétation naturelle — sauf, en ce qui concerne l'ambiguïté essentielle présente

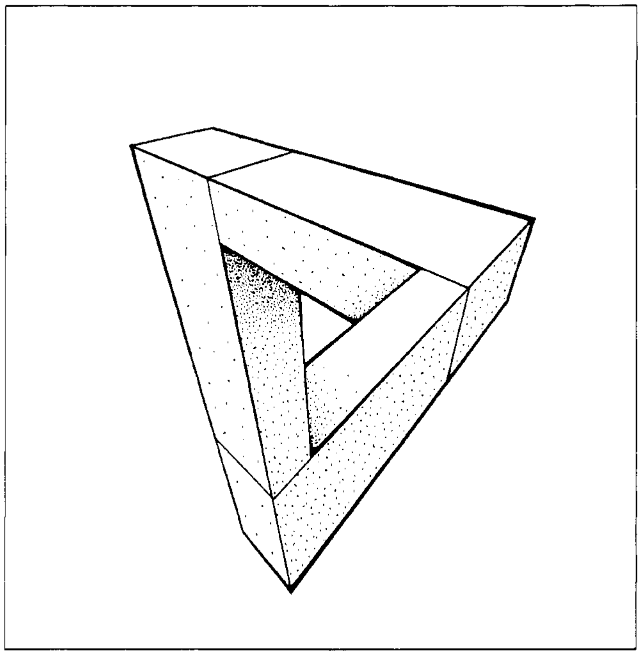

FIGURE 1

An impossible figure—the tribar—drawn with perspective.

Une figure impossible–la tripoutre–dessinée en perspective.

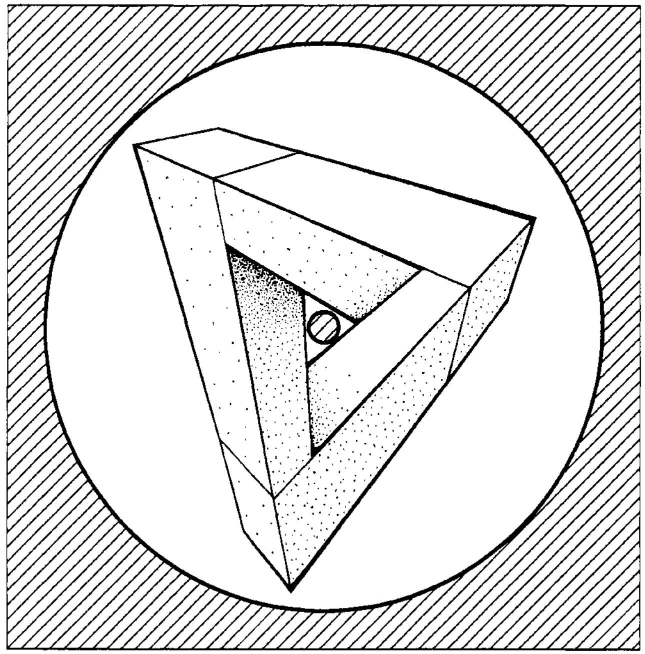

FIGURE 2

The tribar can be drawn on an annular region of the plane, having non-trivial topology.

La tripoutre peut être dessinée dans une région annulaire du plan, possédant une topologie non-triviale.