



ONE-STORY BUILDINGS AS TENSEGRITY FRAMEWORKS PART II *



DES ÉDIFICES D'UN ÉTAGE COMME CHARPENTES DE TENSÉGRITÉ PARTIE II *

András Recski

Technical University Budapest
Department of Mathematics
Budapest, Stoczek u. 2-4
H-1111, Hungary

ABSTRACT

The minimum number of diagonal cables to make a one-story building infinitesimally rigid was determined in Part I. The characterization of the minimum systems is now given in two special cases: If the underlying graph is not a tree, and if all the cables are parallel.

1. INTRODUCTION

Consider a 1-story building on a square grid, with the vertical bars fixed to the earth via joints. If each of the four external vertical wall contains a diagonal, the four corners of the room become fixed. Hence questions related to the infinitesimal rigidity of one-story buildings are reduced [2] to those related to the infinitesimal rigidity of 2-dimensional square grids where the corners are pinned down.

Suppose at first that the corners of the grid are *not* pinned down. If such a grid has k rows and ℓ columns then $k+\ell-1$ is the minimum number of diagonal rods to rigidify the grid, and a system of $k+\ell-1$ rods is appropriate if and only if the corresponding subgraph of the complete bipartite graph $K_{k,\ell}$ is a tree [2]. In what follows, the two subsets of the vertex set of $K_{k,\ell}$ will be denoted by A and B with $|A| = k$ and $|B| = \ell$.

RÉSUMÉ

Dans la partie I, on avait déterminé le nombre minimal de câbles diagonaux pour rendre infinitésimalement rigide un édifice d'un étage. On donne maintenant la caractérisation des systèmes minimaux dans deux cas spéciaux : celui où le graphe sous-jacent n'est pas un arbre, et celui où tous les câbles sont parallèles.

1. INTRODUCTION

Considérons un édifice d'un étage construit sur une grille carrée, ses barres verticales étant fixées au sol à l'aide de joints. Si chacun des quatre murs verticaux extérieurs contient une diagonale, les quatre coins du toit sont alors fixés. Les questions relatives à la rigidité infinitésimale des édifices d'un étage se réduisent donc à celles liées à la rigidité infinitésimale des grilles carrées bidimensionnelles dont les coins sont fixés au plan [2].

Supposons tout d'abord que les coins de la grille ne sont *pas* fixés au plan. Si une telle grille possède k lignes et ℓ colonnes, alors $k+\ell-1$ est le nombre minimal de tiges diagonales nécessaires pour rigidifier la grille, et un système de $k+\ell-1$ tiges est approprié si et seulement si le sous-graphe correspondant du graphe biparti complet $K_{k,\ell}$ est un arbre [2]. Dans ce qui suit, les deux sous-ensembles

* Part I of this paper was published in *Structural Topology*, number 12.

* La partie I de cet article a été publiée dans le numéro 12 de la revue *Topologie structurale*.

If we apply diagonal cables rather than rods then connectedness of the corresponding directed subgraph is replaced by strong connectedness, and the minimum number becomes $2 \cdot \max(k, \ell)$, see [1, Theorem 10.15].

If the corners of the grid are pinned down, the minimum number of necessary diagonal rods reduces to $k + \ell - 2$ [2] and such a system is appropriate if and only if the corresponding subgraph is an asymmetric 2-component forest [4]. Recall that a 2-component forest with vertex sets V_1, V_2 of the components is called asymmetric if $|V_1 \cap B| \neq \frac{\ell}{k} \cdot |V_1 \cap A|$. Finally, if we use diagonal cables, the necessary minimum was proved to be

$$\begin{cases} 0 & \text{if } k = \ell = 1 \\ 4 & \text{if } k = \ell = 2 \\ k + \ell - 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[3]. However, the problem of characterizing all minimal infinitesimally rigid systems (if $k, \ell \geq 2$ and $k + \ell \geq 5$) seems to be open. For example, the reader may try to guess, which of the two systems on **Figure 4** below is infinitesimally rigid. We are going to prove the following two partial results.

Theorem 1:

Consider a system of $k + \ell - 1$ diagonal cables in the $k \times \ell$ square grid where the corners are pinned down. Suppose the corresponding subgraph is not a tree. Then the system of cables makes the grid infinitesimally rigid if and only if $k - \ell = \pm 1$ and the corresponding subgraph is a directed circuit with $2 \cdot \min(k, \ell)$ vertices (see **Figure 2**).

Theorem 2:

Consider a system of $k + \ell - 1$ diagonal cables in the $k \times \ell$ square grid where the corners are pinned down, and suppose that all the diagonals are parallel (i.e. the orientation of every edge is the same, say from A towards B). Then the system makes the grid infinitesimally rigid if and only if $|N(X)| > \frac{\ell}{k} \cdot |X|$ holds for every proper subset X of

de l'ensemble des sommets de $K_{k, \ell}$ seront désignés par A et B où $|A| = k$ et $|B| = \ell$.

Si on applique des câbles diagonaux en lieu et place des tiges, la connexité du sous-graphe orienté correspondant est alors remplacée par une connexité forte, et le nombre minimal devient $2 \cdot \max(k, \ell)$, voir [1, théorème 10.15].

Si les coins de la grille sont fixés au plan, le nombre minimal de tiges diagonales nécessaires est réduit à $k + \ell - 2$ [2], et un tel système est approprié si et seulement si le sous-graphe correspondant est une forêt asymétrique à 2 composantes connexes [4]. Rappelons qu'une forêt à 2 composantes connexes dont les ensembles de sommets sont V_1 et V_2 est dite asymétrique si $|V_1 \cap B| \neq \frac{\ell}{k} \cdot |V_1 \cap A|$. Il a été démontré, enfin, que si on utilise des câbles diagonaux, le nombre minimal nécessaire est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell = 1 \\ 4 & \text{si } k = \ell = 2 \\ k + \ell - 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

[3]. Toutefois, le problème de la caractérisation de tous les systèmes infinitésimalement rigides minimaux (si $k, \ell \geq 2$ et $k + \ell \geq 5$) semble être ouvert. Par exemple, le lecteur peut tenter de deviner lequel des deux systèmes de la **figure 4** est infinitésimalement rigide. Voici deux résultats partiels dont on donnera les démonstrations.

Théorème 1

Considérons un système de $k + \ell - 1$ câbles diagonaux dans la grille carrée $k \times \ell$ dont les coins sont fixés au plan. Si le sous-graphe correspondant n'est pas un arbre, alors le système de câbles rend la grille infinitésimalement rigide si et seulement si $k - \ell = \pm 1$ et le sous-graphe correspondant est un circuit orienté sur $2 \cdot \min(k, \ell)$ sommets (voir la **figure 2**).

FIGURE 1

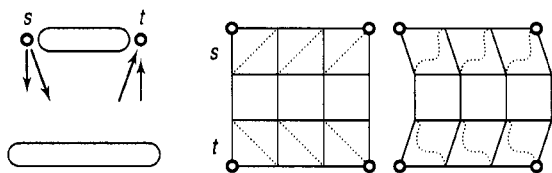


FIGURE 2

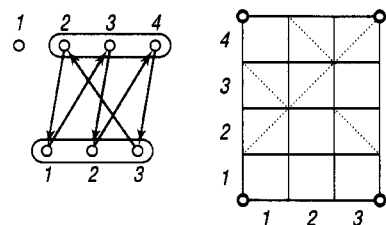


FIGURE 3

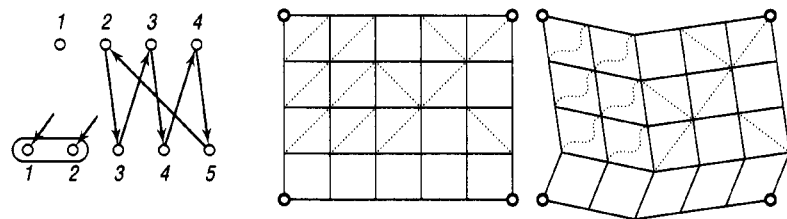
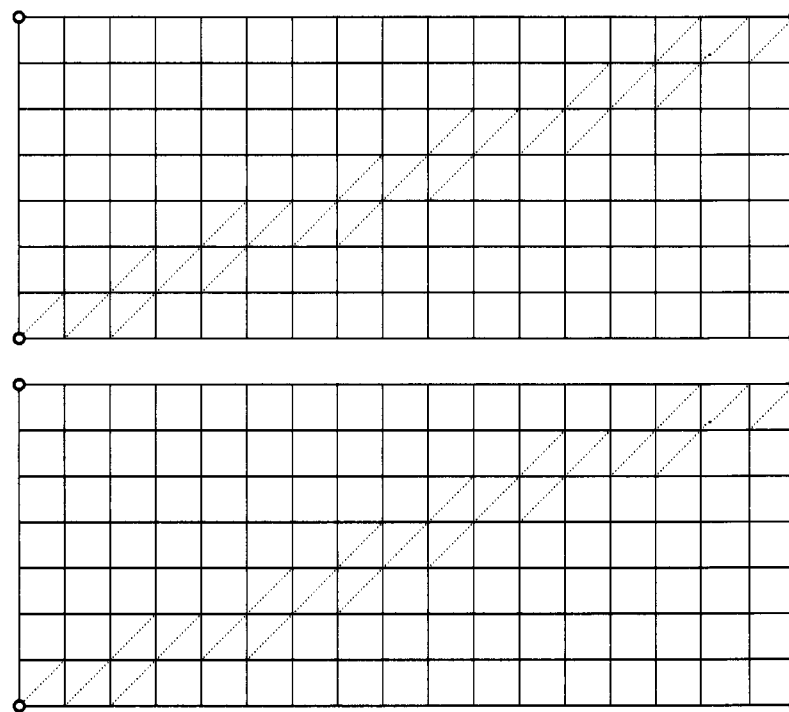


FIGURE 4



A , where $N(X)$ denotes the set of those vertices of B which are adjacent to at least one vertex of X .

2. PROOF OF THEOREM 1

Following the notation of [3] let $x_1, x_2, \dots, x_k$ denote the horizontal translations of the rows and $y_1, y_2, \dots, y_\ell$ the vertical translations of the columns. Fixing the four corners of the grid means

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0 \quad \text{and} \quad y_1 + y_2 + \dots + y_\ell = 0$$

[2], and a directed edge (i, j) means $x_i \geq y_j$. Hence the directed circuit with vertices, say, $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$ means that all the $2k$ quantities are equal. Thus $x_i = y_i = 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$ by (1) and $y_{k+1} = 0$ also follows.

We must show that this is the only possibility for a minimum system of cables, if the corresponding subgraph G is not a tree. Since we have $k + \ell$ vertices and the number of edges in G is $k + \ell - 1$, if G is not a tree, it has $c > 1$ connected components.

At first we prove that the system cannot be infinitesimally rigid if $c > 2$. Recall that the directed edges within a component imply relations among x_i 's and y_j 's of that component only. Hence the most one can expect is that all these quantities are equal to a common value z_i within a component G_i of G . Then we still have c quantities $z_1, z_2, \dots, z_c$ and only two further equations, namely (1). Hence the z_i 's can be chosen so that at least one of them is different from zero.

Thus $c = 2$ and one of the components, say G_1 , contains no circuit. Hence it has a source s (with indegree zero) and a sink t (with outdegree zero).

Lemma 1

If a source s and a sink t are distinct and they are in the same vertex set A then the system cannot be rigid.

Théorème 2

Considérons un système de $k + \ell - 1$ câbles diagonaux dans la grille carrée $k \times \ell$ dont les coins sont fixés au plan, et supposons que toutes les diagonales soient parallèles (c'est-à-dire que l'orientation de toutes les arêtes est la même, disons de A vers B). Alors le système rend la grille infinitésimalement rigide si et seulement si $|N(X)| > \frac{\ell}{k} \cdot |X|$ est valide pour tout sous-ensemble propre X de A , où $N(X)$ désigne l'ensemble des sommets de B qui sont adjacents à au moins un sommet de X .

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Selon la notation utilisé dans [3], soient $x_1, x_2, \dots, x_k$ les translations horizontales des lignes, et $y_1, y_2, \dots, y_\ell$ les translations verticales des colonnes. Fixer les quatre coins de la grille signifie

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 + \dots + y_\ell = 0$$

[2], et une arête orientée (i, j) signifie $x_i \geq y_j$. L'existence d'un circuit orienté de sommets, disons, $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$ signifie donc que toutes les $2k$ quantités sont égales. Ainsi $x_i = y_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, k$ par (1) et $y_{k+1} = 0$ s'ensuit également.

On doit démontrer que c'est la seule possibilité pour un système minimal de câbles, si le sous-graphe correspondant G n'est pas un arbre. Puisqu'on a $k + \ell$ sommets et que le nombre d'arêtes de G est $k + \ell - 1$, si G n'est pas un arbre, il possède $c > 1$ composantes connexes.

Dans un premier temps, on démontre que le système ne peut être infinitésimalement rigide si $c > 2$. Il faut se rappeler que les arêtes orientées à l'intérieur d'une composante n'impliquent des relations qu'entre les x_i et les y_j de cette composante. Le mieux qu'on puisse espérer est donc que toutes ces quantités soient égales à une valeur commune z_i à l'intérieur d'une composante G_i de G . Il nous reste alors encore c quantités $z_1, z_2, \dots, z_c$ et seulement deux équations,

Proof

Simply put $x_s = +1$, $x_t = -1$ and zero for everywhere else, to obtain a deformation (see **Figure 1**).

Suppose at first that G_1 has a single vertex $s = t$ only, in one of the vertex sets, say in A . Then G_2 can have neither sinks nor sources in A , by lemma 1, and if $V(G_2) \cap B$ has a sink, it cannot have any source, for the same reason. Hence the only circuit C of G_2 must be directed with $V(C) \cap A = V(G_2) \cap A$ and all the points in $D = B - V(C)$ must then be sinks.

If $D = \emptyset$, we obtained case (ii) of Theorem 1, see **Figure 2**. Otherwise assign a negative value u for every x_i, y_i of C , assign $-u \cdot |V(C) \cap A|$ to s and $-u \cdot |V(C) \cap B| / |D|$ to the points of D , to obtain a deformation, see **Figure 3**.

Now suppose that G_1 has several vertices and $s \in A$ and $t \in B$. Let $a = |V(G_1) \cap A| - 1$, $b = |V(G_1) \cap B| - 1$ and $c = k - a - 1$, $d = \ell - b - 1$. We put $x_i = y_i = u_2$ for every point in G_2 , $x_i = y_i = u_1$ for every point except s and t in G_1 , and $x_s = u_1 + \varepsilon$, $y_t = u_1 - \delta$. Then all the inequalities determined by the cables are met if $\varepsilon, \delta \geq 0$ and the following system of equations given by (1) is satisfied:

$$\begin{aligned} (a+1)x + cy &= -\varepsilon \\ (b+1)x + dy &= \delta \end{aligned}$$

This is uniquely solvable for any ε, δ if $\begin{vmatrix} a+1 & c \\ b+1 & d \end{vmatrix} \neq 0$. If the determinant vanishes then it is also solvable with $\varepsilon = \delta = 0$.

3. PROOF OF THEOREM 2**a. Necessity**

Suppose that $|N(X)| \leq \frac{\ell}{k} \cdot |X|$ for some $X \subset A$ ($X \neq \emptyset$; $X \neq A$). We construct a deformation as follows. Let $Y = A - X$. Assign $x_i = -|Y|$ for the points in X and $x_i = |X|$ for the points in Y . In the other vertex set assign $y_i = -|Y|$ for the points in $N(X)$ and $y_i = c$ for the points in

celles de (1). Les z_i peuvent donc être choisis de telle sorte qu'au moins l'un d'entre eux soit différent de zéro.

Ainsi, $c=2$ et l'une des composantes, disons G_1 , ne contient aucun circuit. Il possède donc une source s (de degré intérieur zéro) et un puits t (de degré extérieur zéro).

Lemme 1

Si une source s et un puits t sont distincts et qu'ils appartiennent au même ensemble de sommets A , alors le système ne peut être rigide.

Démonstration

Il s'agit simplement de faire en sorte que $x_s = +1$, $x_t = -1$ et zéro partout ailleurs, et on obtient une déformation (voir **figure 1**).

Supposons tout d'abord que G_1 ne possède qu'un seul sommet $s = t$, dans l'un des ensembles de sommets, disons dans A . Alors G_2 peut n'avoir ni puits, ni source dans A , par le Lemme 1, et si $V(G_2) \cap B$ possède un puits, il ne peut avoir aucune source, pour la même raison. Le seul circuit C de G_2 doit donc être orienté où $V(C) \cap A = V(G_2) \cap A$ et tous les points appartenant à $D = B - V(C)$ doivent alors être des puits.

Si $D = \emptyset$, on obtient le cas (ii) du théorème 1, voir **figure 2**. Autrement, on assigne une valeur négative u à tous les x_i, y_i de C , on assigne $-u \cdot |V(C) \cap A|$ à s et $-u \cdot |V(C) \cap B| / |D|$ aux points de D , pour obtenir une déformation, voir **figure 3**.

Supposons maintenant que G_1 possède plusieurs sommets et $s \in A$ et $t \in B$. Soient $a = |V(G_1) \cap A| - 1$, $b = |V(G_1) \cap B| - 1$ et $c = k - a - 1$, $d = \ell - b - 1$. On pose $x_i = y_i = u_2$ pour tout point de G_2 , $x_i = y_i = u_1$ pour tout point de G_1 sauf s et t , et $x_s = u_1 + \varepsilon$, $y_t = u_1 - \delta$. Toutes les inégalités déterminées par les câbles sont alors vérifiées si $\varepsilon, \delta \geq 0$ et le système d'équations suivant donné par (1) est satisfait:

$$\begin{aligned} (a+1)x + cy &= -\varepsilon \\ (b+1)x + dy &= \delta \end{aligned}$$

$B - N(X)$. In order to meet (1) we need $|N(X)| \cdot |Y| = |B - N(X)| \cdot c$ which gives

$$(2) \quad c = \frac{|N(X)| \cdot (k - |X|)}{\ell - |N(X)|}.$$

The conditions $x_i \geq y_j$ implied by the cables are clearly met if $i \in A$, $j \in N(X)$. The case $i \in X$, $j \in B - N(X)$ is impossible by the definition of $N(X)$. Hence only the case $i \in Y$, $j \in B - N(X)$ is left, i.e. we have to prove $c \leq |X|$. However, by (2) it is just equivalent to $|N(X)| \leq \frac{\ell}{k} \cdot |X|$.

b. Sufficiency

We extend our graph G into a larger graph G_o as follows. Let us consider ℓ copies $A_1, A_2, \dots, A_\ell$ of A and k copies $B_1, B_2, \dots, B_k$ of B . The unions $A_o = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ and $B_o = B_1 \cup \dots \cup B_k$ of these sets define the bipartition of the vertex set of G_o and the i^{th} vertex x_i^p of a subset A_o is adjacent to the j^{th} vertex y_j^q of a subset B_o in G_o if and only if x_i is adjacent to y_j in G .

Both subsets A_o and B_o have cardinality $\ell \cdot k$, hence G_o has a perfect matching if and only if $|N(X)| \geq |X|$ for every $X \subseteq A_o$ [5]. For any subset X of A_o we define the inverse image $I(X)$ of it as a subset of A so that $x_i \in I(X)$ if and only if $x_i^p \in X$ for some p . Clearly, $|I(X)| \geq |X| / \ell$ for any X .

Consider now an arbitrary subset X of A_o . Observe that $|N(X)| = k \cdot |N(I(X))|$ by the definition of G_o . On the other hand, $|N(I(X))| > \frac{\ell}{k} |I(X)|$ by the condition. Hence

$$|N(X)| = k \cdot |N(I(X))| > \ell \cdot |I(X)| \geq |X|,$$

thus G_o has a perfect matching $M = \{(x_{i_r}, y_{j_r}) ; r = 1, 2, \dots, k \cdot \ell\}$.

Each edge of M implies an inequality $y_{j_r} \leq x_{i_r}$; each quantity x_{i_r} arises ℓ times and each y_{j_r} arises k times in this set of inequalities. Hence the equality

On trouvera une solution unique pour tout ε, δ si $\begin{vmatrix} a+1 & c \\ b+1 & d \end{vmatrix} \neq 0$. Si le déterminant s'annule, le système possède alors aussi une solution pour $\varepsilon = \delta = 0$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

a. Nécessité

Supposons que $|N(X)| \leq \frac{\ell}{k} \cdot |X|$ pour un certain $X \subset A$ ($X \neq \emptyset$; $X \neq A$). On peut construire une déformation de la façon suivante. Soit $Y = A - X$. Posons $x_i = -|Y|$ pour les points de X et $x_i = |X|$ pour les points de Y . Dans l'autre ensemble de sommets, posons $y_j = -|Y|$ pour les points de $N(X)$ et $y_j = c$ pour les points appartenant à $B - N(X)$. Pour que les équations de (1) soient satisfaites, il faut que $|N(X)| \cdot |Y| = |B - N(X)| \cdot c$, ce qui donne

$$(2) \quad c = \frac{|N(X)| \cdot (k - |X|)}{\ell - |N(X)|}.$$

Les conditions $x_i \geq y_j$ amenées par les câbles sont clairement vérifiées si $i \in A$, $j \in N(X)$. Le cas $i \in X$, $j \in B - N(X)$ est impossible par définition de $N(X)$. Il ne reste donc que le cas $i \in Y$, $j \in B - N(X)$. On a donc à démontrer que $c \leq |X|$. Toutefois, on voit par (2) que c'est équivalent à $|N(X)| \leq \frac{\ell}{k} \cdot |X|$.

b. Suffisance

On étend le graphe G en un plus grand graphe, G_o , de la façon suivante. Considérons ℓ copies $A_1, A_2, \dots, A_\ell$ de A et k copies $B_1, B_2, \dots, B_k$ de B . Les réunions $A_o = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ et $B_o = B_1 \cup \dots \cup B_k$ de ces ensembles déterminent une bipartition de l'ensemble de sommets de G_o et le i -ème sommet x_i^p d'un sous-ensemble A_o est adjacent au j -ième sommet y_j^q d'un sous-ensemble B_o dans G_o si et seulement si x_i est adjacent à y_j dans G .

Les deux sous-ensembles A_o et B_o étant de cardinalité $\ell \cdot k$, G_o possède un couplage parfait si et seulement si $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A_o$ [5]. Pour tout sous-ensemble X de A_o , on définit son image

$$0 = k \cdot \sum_{i=1}^{\ell} y_i \leq \ell \cdot \sum_{j=1}^k x_j = 0$$

can hold only if each of the above inequalities $y_i \leq x_j$ are in fact equalities.

Lemma 2

If $|N(X)| > \frac{\ell}{k} |X|$ holds for every proper subset X of A then the deletion of any one edge of G leads to an asymmetric 2-component forest.

Proof

Let $e = (x, y)$ be an arbitrary edge and let G_1, G_2 be the components of $G - e$, with respective vertex sets V_1, V_2 . Should $|V_i \cap B| = \frac{\ell}{k} \cdot |V_i \cap A|$ hold, the choice $X = V_2 \cap A$ if $x \in V_1$ or $X = V_1 \cap A$ if $x \in V_2$, leads to a contradiction.

In order to finish the proof, consider those edges of G only where equality holds. If the resulting subgraph F is the whole graph G then the system is infinitesimally rigid and the proof is complete. Otherwise F is a forest with several components $F_1, F_2, \dots$ and the system is infinitesimally non-rigid. We show that this is impossible.

Let $|V(F_i) \cap A|$ and $|V(F_i) \cap B|$ be denoted by k_i and ℓ_i , respectively. If $k_i = \frac{\ell}{k} \cdot \ell_i$ for every i , we obtain a contradiction by Lemma 2. Otherwise there exists a subscript i so that $k_i > \frac{\ell}{k} \cdot \ell_i$ holds. Then the choice $X = V(F_i) \cap A$ leads to a contradiction.

4. EXAMPLES AND REMARKS

- In order to illustrate Theorem 2, consider the two frameworks of **Figure 4**. The first one is infinitesimally rigid, the second one is not. One can see this difference by letting X be the subset formed by the first five rows. Then $N(X)$ is of the cardinality 13 in the first case and 12 in the second one, and $12 < \frac{5 \cdot 17}{7} < 13$.
- The end of the proof of Theorem 2 (Lemma 2 and the last two

inverse $I(X)$ comme un sous-ensemble de A tel que $x_i \in I(X)$ si et seulement si $x_i^p \in X$ pour un certain p . De façon évidente, $|I(X)| \geq |X|/\ell$ pour tout X .

Considérons maintenant un sous-ensemble arbitraire X de A_0 . On note que $|N(X)| = k \cdot |N(I(X))|$ par définition de G_0 . D'autre part, $|N(I(X))| > \frac{\ell}{k} \cdot |I(X)|$ par la condition. Donc

$$|N(X)| = k \cdot |N(I(X))| > \ell \cdot |I(X)| \geq |X|;$$

ainsi G_0 possède un couplage parfait $M = \{(x_i, y_i); i = 1, 2, \dots, k \cdot \ell\}$.

Chaque arête de M implique une inégalité $y_i \leq x_j$; chaque quantité x_j survient ℓ fois et chaque y_i survient k fois dans cet ensemble d'inégalités. Donc, l'égalité

$$0 = k \cdot \sum_{i=1}^{\ell} y_i \leq \ell \cdot \sum_{j=1}^k x_j = 0$$

ne tient que si chacune des inégalités $y_i \leq x_j$ sont en fait des égalités.

Lemme 2

Si l'inégalité $|N(X)| > \frac{\ell}{k} \cdot |X|$ est vérifiée pour tout sous-ensemble propre X de A , alors la suppression d'une arête quelconque de G mène à une forêt asymétrique à 2 composantes.

Démonstration

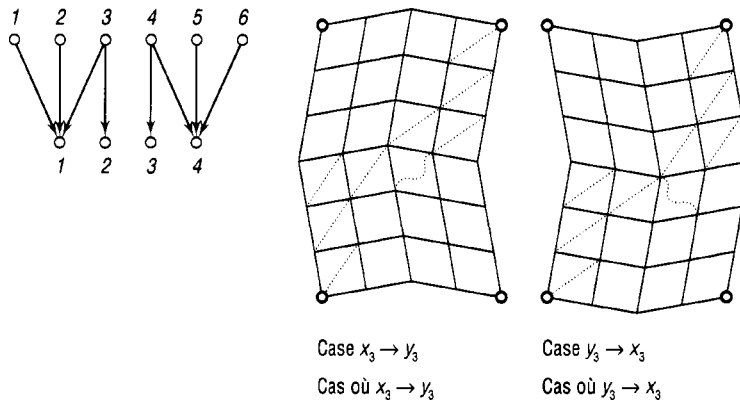
Soit $e = (x, y)$ une arête arbitraire, et soient G_1 et G_2 les composantes de $G - e$, dont les ensembles de sommets sont respectivement V_1 et V_2 . Si l'égalité $|V_i \cap B| = \frac{\ell}{k} \cdot |V_i \cap A|$ était satisfaite, le choix de $X = V_2 \cap A$ si $x \in V_1$, ou de $X = V_1 \cap A$ si $x \in V_2$, mènerait à une contradiction.

Dans le but de terminer la démonstration, considérons seulement les arêtes de G pour lesquelles l'égalité est vérifiée. Si le sous-graphe résultant F est le graphe entier G , alors le système est infinitésimalement rigide et la démonstration est complétée. Autrement, F est une forêt ayant plusieurs composantes $F_1, F_2, \dots$ et le système est

paragraphs) can be significantly shortened. By a theorem of Heteyi [6] every edge is contained in a perfect matching if the Hall-condition holds with strict inequality for every proper subset of A (see also Problem 7.7 in [8]). Then the connectivity of G immediately implies infinitesimal rigidity.

- c. There are plenty of efficient algorithms to check whether a bipartite graph has a perfect matching, see [7] for example. Hence the condition of Theorem 2 can easily be checked.
- d. The property described in Lemma 2 (the deletion of any one edge e of G leads to an asymmetric 2-component forest) is necessary for the infinitesimal rigidity even if the cables are not parallel. Even if all the cables of $G - e$ are replaced by rods, there are two types of deformations and one of them is a deformation of our original system (see Figure 5).

FIGURE 5



infinitésimalement flexible. On a montré que c'était impossible.

Soit $|V(F_i) \cap A|$ et $|V(F_i) \cap B|$ représentés par k_i et ℓ_i , respectivement. Si $k_i = \frac{\ell_i}{k} \cdot \ell_i$ pour tout i , on obtient une contradiction par le lemme 2. Autrement, il existe un indice i tel que $k_i > \frac{\ell_i}{k} \cdot \ell_i$. Le choix de $X = V(F_i) \cap A$ amène alors une contradiction.

4. EXEMPLES ET REMARQUES

- a. Afin d'illustrer le théorème 2, considérons les deux structures de la figure 4. La première est infinitésimalement rigide, la seconde ne l'est pas. On peut voir cette différence en désignant par X le sous-ensemble constitué des cinq premières lignes. $N(X)$ est alors de cardinalité 13 dans le premier cas et 12 dans le second, et $12 < \frac{5 \cdot 17}{7} < 13$.
- b. La fin de la démonstration du théorème 2 (le lemme 2 et les deux derniers paragraphes) peut être significativement écourtée. Selon un théorème de Heteyi [6], toute arête est contenue dans un couplage parfait si la condition de Hall est vérifiée avec des inégalités strictes pour tout sous-ensemble propre de A (voir aussi le problème 7.7 dans [8]). La connexité de G implique alors immédiatement la rigidité infinitésimale.
- c. Il existe un grand nombre d'algorithmes efficaces pour vérifier si un graphe biparti possède un couplage parfait, voir [7] par exemple. Ainsi, la condition du théorème 2 est facilement vérifiable.
- d. La propriété décrite dans le lemme 2 (la suppression d'une arête quelconque e de G mène à une forêt asymétrique à 2 composantes) est nécessaire à la rigidité infinitésimale, même si les câbles ne sont pas tous parallèles. Même lorsque tous les câbles de $G - e$ sont remplacés par des tiges, il existe deux types de déformations et l'un d'eux est une déformation du système original (voir figure 5).

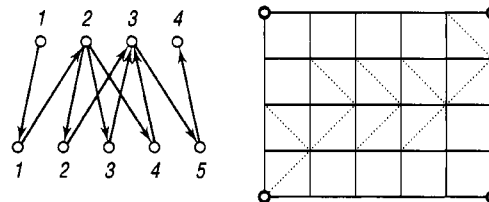
e. A deformation is called elementary if there exists a bipartition $X \cup Y$ of A and a constant c such that $x_i = c \cdot |Y|$ for $i \in X$ and $x_i = -c \cdot |X|$ for $i \in Y$, and a similar condition holds for the y_i 's as well. (That is, only two distinct values arise among the x_i 's and also two among the y_i 's.) The deformations, illustrated on **Figures 3 and 5** are elementary. A byproduct of the proof of Theorem 2 is that if the $k + \ell - 1$ cables are all parallel then the system is either infinitesimally rigid or possesses elementary deformations. **Figure 6** shows a system which is infinitesimally non-rigid (see **Figure 7**) but has no elementary deformations (as it can be shown by a straight forward calculation).

Acknowledgement

This work was partially supported by the Institute für Operations Research and by the Alexander-von-Humboldt-Stiftung (Bonn, FRG).

..lll..

FIGURE 6



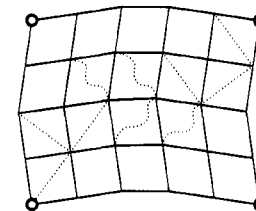
e. Une déformation est dite élémentaire s'il existe une bipartition $X \cup Y$ de A et une constante c telles que $x_i = c \cdot |Y|$ pour $i \in X$ et $x_i = -c \cdot |X|$ pour $i \in Y$, et telles que des conditions similaires soient vérifiées pour les y_i aussi. (C'est-à-dire que les x_i ne prennent que deux valeurs distinctes, de même que les y_i .) Les déformations illustrées aux **figures 3 et 5** sont élémentaires. La preuve du théorème 2 amène le résultat secondaire suivant : si les $k + \ell - 1$ câbles sont tous parallèles, alors, ou bien le système est infinitésimalement rigide, ou bien il possède des déformations élémentaires. La **figure 6** montre un système qui est infinitésimalement flexible (voir **figure 7**) mais ne possède pas de déformations élémentaires (comme on peut le montrer par un calcul direct).

Remerciements

Cette recherche a été réalisée en partie grâce à des subventions de l'Institute für Operations Research et de l'Alexander-von-Humboldt-Stiftung (Bonn, RFA).

..lll..

FIGURE 7



**BIBLIOGRAPHY /
BIBLIOGRAPHIE**

[1] J.A. Baglivo & J.E. Graver
Incidence and symmetry in design and
architecture.
Cambridge University Press, 1983.

[2] E. Bolker & H. Crapo
"How to brace a one-story building."
Env. Plan. B. 4 (1977), 125-152.

[3] N. Chakravarty, G. Holman, S.
McGuinness & A. Recski
"One-story buildings as tensegrity
frameworks."
Topologie structurale 12 (1986), 11-18.

[4] H. Crapo
"More on the bracing of one-story
buildings."
Env. Plan. B. 4 (1977), 153-156.

[5] P. Hall
"On representatives of subsets."
J. London Math. Soc. 10 (1935), 26-30.

[6] G. Heteyi
"On covering by 2×1 rectangles."
Pécsi Tan. Főisk. Köz. (1964), 151-168.

[7] J.E. Hopcroft et R.M. Karp
"An $n^{3/2}$ algorithm for maximum
matchings in bipartite graphs."
SIAM J. Comput. 2, (1973), 225-231.

[8] L. Lovász
Combinatorial problems and exercises.
North-Holland, Amsterdam, 1979.
