ALL REALIZATIONS OF MÖBIUS' TORUS WITH 7 VERTICES

TOUTES LES RÉALISATIONS DU TORE DE MÖBIUS AVEC SEPT SOMMETS

Jürgen Bokowski &
Anselm Eggert
Department of Mathematics
University Darmstadt
D–6100 Darmstadt
Germany

ABSTRACT

We provide all geometric polyhedral realizations of Möbius' torus with 7 vertices. There are no simplicial realizations having a higher geometric symmetry than Császár's. We confirm two conjectures about the realization space of Möbius' torus posed by J. Reay. Above all, the article shows oriented matroids to be a useful tool for investigating polyhedral structures.

RÉSUMÉ

Nous présentons toutes les réalisations géométriques polyédriques du tore de Möbius avec sept sommets. Il n'existe pas de réalisation simpliciale possédant une plus grande symétrie géométrique que celle de Császár. Nous confirmons deux conjectures énoncées par J. Reay à propos de l'espace de réalisation du tore de Möbius. Par dessus tout, cet article montre que les matroïdes orientées sont des outils efficaces pour la recherche de structures polyédriques.

1. INTRODUCTION

This article can be viewed as a contribution to the more general framework of computational synthetic geometry: for a geometric object we are given some properties (e.g. the combinatorial list of all faces of a polyhedron), and we ask for a decision of whether the geometric object does exist as an embedding in Euclidean space of fixed dimension. In the following oriented matroids play a crucial role. Introducing oriented matroids in this context has proven to be useful in many instances, see[9].

1. INTRODUCTION

On peut considérer cet article comme une contribution à la structure plus générale de la géométrie calculatoire synthétique : étant données certaines propriétés d'un objet géométrique (par ex. la liste combinatoire de toutes les faces d'un polyèdre), on cherche une règle de décision qui permettrait de déterminer si l'objet géométrique peut exister comme un plongement dans un espace euclidien de dimension donnée. Dans ce qui suit, les matroïdes orientées jouent un rôle crucial. L'introduction dans ce contexte des matroïdes orientées s'est avérée utile dans bien des cas, voir [9].

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

The combinatorial description of a torus with seven vertices was first given by Möbius in 1861 [17]. It is not known whether Möbius knew a *polyhedral realization*, i.e. a polyhedral realization without self-intersections. Reinhard's version with 7 vertices of a cube given in 1885 [19] has a symmetry of order 3. It cannot be considered as a polyhedral realization in our sense because it must have self-intersections as a by-product of our investigations.

Császár's realization was published in 1949 [11]. It has a symmetry of order 2, and this seems to be the first polyhedral realization of Möbius' torus at all. Császár did not mention Möbius' result. Since Császár, different realizations of Möbius' torus were found, see e.g. Grünbaum [13, p.253], Altshuler [1]. They were used as examples for different purposes, see e.g. Sarkaria [20], and to have one particular realization at all seemed to be sufficient in these papers.

In this article, we present a systematic and complete description of all types of Möbius' torus with an emphasis on symmetric polyhedral realizations. We confirm two conjectures about the realization space of Möbius' torus posed by J. Reay in [18], Problems 18.A3 and 18.A5. Among our results we have in particular: there are no realizations having a higher geometric symmetry than Császár's.

We start with the combinatorial description of Möbius' torus in Section 2. Using a computer we construct those (allowable) simplicial oriented matroids for Möbius' torus which do not contain certain circuits, see Section 3. For all these types, a realization can be found.

The different types can be classified in Section 4 according to symmetry and the facial structure of their convex hull. An isotopy result respecting the symmetry of the given type will be given in Section 5.

It is convenient to describe the different types of realized Möbius' tori as vertices in a graph. One connected component of this graph is described in more detail in Section 5. In Section 6 we prove that, in order to find all (simplicial and non-simplicial) oriented matroids, it suffices to consider the simplicial ones first.

La description combinatoire d'un tore à sept sommets a d'abord été donnée par Möbius en 1861 [17]. On ne sait pas si Möbius connaissait une *réalisation polyédrique*, c'est-à-dire une réalisation polyédrique sans auto-intersection. La version de Reinhard, en 1885 [19], avec sept sommets d'un cube, possède une symétrie d'ordre 3. On ne peut la considérer comme une réalisation polyédrique selon notre définition car, en conséquence de nos recherches, elle doit avoir des auto-intersections.

La réalisation de Császár a été publiée en 1949 [11]. Elle possède une symétrie d'ordre 2, et semble être la toute première réalisation polyédrique du tore de Möbius. Császár n'avait pas mentionné le résultat de Möbius. Depuis Császár, on a trouvé diverses réalisations du tore de Möbius; voir, par exemple, Grünbaum [13, p.253], Altshuler [1]. On les a utilisées à titre d'exemples dans différents buts, voir, par exemple, Sarkaria [20], et dans ces articles, il apparaît suffisant de ne présenter qu'une réalisation particulière.

On présente ici une description systématique et complète de tous les types de tores de Möbius en privilégiant les réalisations polyédriques symétriques. On confirme deux conjectures concernant l'espace de réalisation du tore de Möbius avancées par J. Reay dans [18], problèmes 18.A3 et 18.A5. Parmi nos résultats, on a en particulier celui-ci: il n'existe pas de réalisation possédant une plus grande symétrie géométrique que celle de Császár.

On débute, à la section 2, avec la description combinatoire du tore de Möbius. En utilisant l'ordinateur, on construit les matroïdes orientées simpliciales (admissibles) pour le tore de Möbius qui ne contient pas certains circuits, voir section 3. Pour tous ces types, on peut trouver une réalisation.

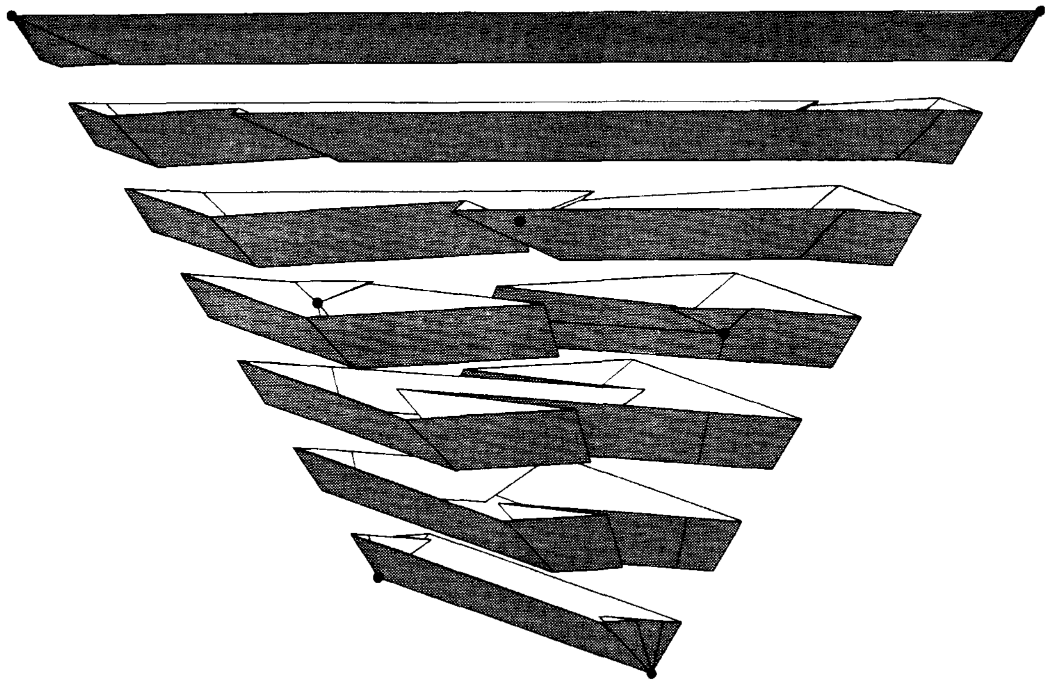
On peut classifier les différents types à la section 4 selon leur symétrie et la structure de faces de leur enveloppe convexe. On trouvera à la section 5 un résultat d'isotopie respectant la symétrie du type donné.

Il est utile de décrire les différents types de tores de Möbius réalisés

In the case of triangulated tori, a Steinitz type question is open, see e.g. Barnette [5]. Another question is the following: can the complete graph K_{12} be embedded as an edge graph of a geometrical polyhedral 2-manifold (without self-intersections) in 3-space? We think that the methods presented here might be useful in some of those problems as well.

A list of all simplicial Möbius oriented matroids is given in the Appendix. A video tape of typical symmetric realizations of Möbius' torus was produced in 1986 by Jürgen Richter-Gebert from Darmstadt (computer graphics), the authors (coordinates), and U. Simon from Siegen (video production). We thank J.M. Wills and the DFG for some financial support.

FIGURE 1



comme des sommets dans un graphe. Une composante connexe de ce graphe est décrite de façon plus détaillée dans la section 5. On prouve, à la section 6, que si l'on veut trouver toutes les matroïdes orientées (simpliciales ou non), il suffit de considérer en premier lieu celles qui sont simpliciales.

Dans le cas des tores triangulés, une question du type de Steinitz demeure ouverte, voir par exemple Barnette [5]. Une autre question est la suivante: peut-on plonger le graphe complet K_{12} considéré comme le graphe d'arêtes d'une 2-variété géométrique polyédrique (sans auto-intersection) dans l'espace à trois dimensions? Nous pensons que les méthodes présentées ici peuvent aussi être utiles dans l'approche de certains de ces problèmes.

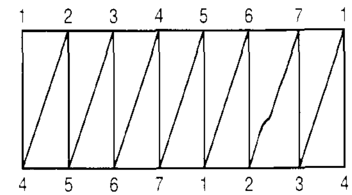
On trouvera en annexe une liste de toutes les matroïdes orientées simpliciales de Möbius. Un film vidéo présentant les réalisations symétriques typiques du tore de Möbius a été produit en 1986 par Jürgen Richter-Gebert de Darmstadt (graphisme sur ordinateur), les auteurs (coordonnées) et U. Simon de Siegen (production vidéo). Nous tenons à remercier J.M. Wills et le DFG pour le support financier.

Lors de nos recherches, nous avons eu plusieurs discussions avec différentes personnes. Nous les remercions toutes pour ces discussions stimulantes; nous remercions tout particulièrement Christoph Beck, Boris Bokowski, Ulrich Brehm, Jürgen Richter-Gebert et Bernd Sturmfels.

2. DESCRIPTION COMBINATOIRE DU TORE DE MÖBIUS

Le complexe combinatoire C_M du tore de Möbius est donné par la liste suivante de triangles, à comparer à Möbius [17, II, p.552]:

124	134
235	245
346	356
457	467
561	571
672	612
713	723

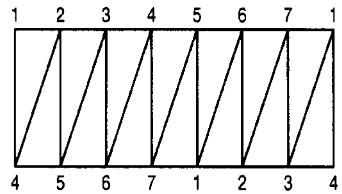


During our investigations we had a lot of discussions with different people. We thank all of them for the stimulating discussions, especially we thank Christoph Beck, Boris Bokowski, Ulrich Brehm, Jürgen Richter-Gebert and Bernd Sturmfels.

2. COMBINATORIAL DESCRIPTION OF MÖBIUS' TORUS

The combinatorial complex C_M of Möbius' torus is given by the following list of triangles, compare Möbius [17, II p.552].

124	134
235	245
346	356
457	467
561	571
672	612
713	723



We denote by H_{C_M} the group of automorphisms of C_M. Its order is 42 and it is generated by $\tau = (1234567)$ and $\rho = (132645)$. Because of this high order of combinatorial symmetry compared with Császár's realization (which has a geometric symmetry of order 2), a natural question arose whether there is a realization admitting a higher geometric symmetry.

One method to obtain a realization of Möbius' torus at all was described in Grünbaum [13, p.253] and in more detail in Altshuler [2] by means of Schlegel diagrams of cyclic polytopes. Our aim in the present paper is to give all types of realizations and especially the symmetric ones. This result was found by determining at first all oriented matroids corresponding to possible realizations. This description is given in Section 3.

3. ORIENTED MATROIDS AND MATROID MANIFOLDS

A finite ordered set of points $E = \{1,2,\ldots,n\}$ in the $(d-1)$-dimensional space $\mathbb{R}^{d-1}$ (for the sake of simplicity in general position) written in terms of homogeneous coordinates defines an $(n \times d)$-matrix over $\mathbb{R}$.

On désignera par H_{C_M} le groupe des automorphismes de C_M. Son ordre est 42 et il est engendré par $\tau = (1234567)$ et $\rho = (132645)$. Étant donné son grand ordre de symétrie combinatoire par rapport à la réalisation de Császár (qui possède une symétrie géométrique d'ordre 2), il est naturel de se poser la question de l'existence d'une réalisation admettant une plus grande symétrie géométrique.

On trouve dans Grünbaum [13, p.253] et avec plus de détails dans Altshuler [2], une méthode permettant d'obtenir une réalisation du tore de Möbius par l'utilisation des diagrammes de Schlegel de polytopes cycliques. Notre but ici est de donner tous les types de réalisations et en particulier celles qui sont symétriques. Ce résultat a été trouvé en déterminant en premier lieu toutes les matroïdes orientées correspondant aux réalisations possibles. Cette description est donnée à la section 3.

3. MATROÏDES ORIENTÉES ET VARIÉTÉS MATROÏDES

Un ensemble fini ordonné de points $E = \{1,2,\ldots,n\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^{d-1}$ de dimension $(d-1)$ (en position générale pour des raisons de simplicité), écrit en termes de coordonnées homogènes définit une matrice de dimension $(n \times d)$ sur $\mathbb{R}$.

Le signe d'un sous-déterminant de dimension $(d \times d)$, formé des lignes $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ de cette matrice (où $\lambda_i \in \{1,\ldots,n\}$), sera noté par signe$[\lambda_1,\ldots,\lambda_d]$. Ce signe nous informe de l'orientation du simplexe de sommets $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$. En particulier, ceci définit pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$ le coté du plan orienté aff$\{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_k},\ldots,\lambda_d\}$ sur lequel se situe le point λ_k.

L'information contenue dans signe$[\lambda_1,\ldots,\lambda_d]$ pour tous les sous-ensembles de d éléments de $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ de E est appelé la matroïde orientée de l'ensemble E.

Il apparaît qu'une définition plus générale d'une matroïde orientée n'est pas seulement commode ; c'est la définition appropriée pour plusieurs raisons. La définition 3.1 est l'une de toutes les définitions possibles. L'ensemble de tous les d-tuples ordonnés de n éléments est noté par $\Lambda(n,d) := \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_d) \mid 1 \le \lambda_1 < \ldots < \lambda_d \le n\}$.

The sign of a $(d \times d)$-subdeterminant formed of the rows $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ of this matrix (with $\lambda_i \in \{1,\ldots,n\}$) will be denoted by sign$[\lambda_1,\ldots,\lambda_d]$. This sign tells us the orientation of the simplex with vertices $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$. In particular, this defines for every $k \in \{1,\ldots,n\}$ the side of the oriented plane aff$\{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_k},\ldots,\lambda_d\}$ on which the point λ_k lies.

The information contained in sign$[\lambda_1,\ldots,\lambda_d]$ for all d-element subsets of $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ of E is called the oriented matroid of the point set E.

It has turned out that a more general definition of an oriented matroid is not only convenient but the appropriate one for various reasons. One definition of all possible ones will be given in the Definition 3.1. The set of all ordered d-tuples of n elements will be denoted by $\Lambda(n,d) := \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_d) \mid 1 \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_d \leq n\}$.

3.1 Definition. A mapping $\chi\colon \Lambda(n,d) \to \{-1,0,+1\}$ or its unique alternating extension $\chi\colon \{1,\ldots,n\}^d \to \{-1,0,+1\}$ is called an *oriented matroid of rank d with n points*, if for all $\lambda \in \Lambda(n,d+1)$ and for all $\mu \in \Lambda(n,d-1)$ the set

$$\left\{(-1)^i \cdot \chi(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{d+1}) \cdot \chi(\mu_1,\ldots,\mu_{d-1},\lambda_i) \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,d+1\}\right\},$$

either contains $\{-1,+1\}$ or equals $\{0\}$. The oriented matroid is called *simplicial* if $\chi(\Lambda(n,d)) \subseteq \{-1,+1\}$.

The dependencies between all $(d \times d)$-subdeterminants can be expressed in the form $\sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i [\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{d+1}][\mu_1,\ldots,\mu_{d-1},\lambda_i] = 0$. This shows that the condition in Definition 3.1 is fulfilled whenever there exists a matrix of homogeneous coordinates, $\chi(\lambda_1,\ldots,\lambda_d) =$ sign$[\lambda_1,\ldots,\lambda_d]$.

3.2 Remark. In the simplicial case, an oriented matroid can be defined to be a mapping $\chi\colon \Lambda(n,d) \to \{-1,+1\}$ with the following property for its unique alternating extension $\chi\colon \{1,\ldots,n\}^d \to \{-1,+1\}$: for all $\sigma \in \Lambda(n,d-2)$ and for all $\tau \in \Lambda(n,4)$, the set

$$\begin{Bmatrix} \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_1,\tau_2) \cdot \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_3,\tau_4), \\ -\chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_1,\tau_3) \cdot \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_2,\tau_4), \\ \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_1,\tau_4) \cdot \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_2,\tau_3) \end{Bmatrix}$$

3.1 Définition. Une transformation $\chi\colon \Lambda(n,d) \to \{-1,0,+1\}$ ou son unique extension alternée $\chi\colon \{1,\ldots,n\}^d \to \{-1,0,+1\}$ est appelée une *matroïde orientée de rang d à n points*, si pour tout $\lambda \in \Lambda(n,d+1)$ et pour tout $\mu \in \Lambda(n,d-1)$ l'ensemble

$$\left\{(-1)^i \cdot \chi(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{d+1}) \cdot \chi(\mu_1,\ldots,\mu_{d-1},\lambda_i) \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,d+1\}\right\},$$

ou bien contient $\{-1,+1\}$, ou bien est égal à $\{0\}$. La matroïde orientée est dite *simpliciale* si $\chi(\Lambda(n,d)) \subseteq \{-1,+1\}$.

Les dépendances entre tous les $(d \times d)$-sous-déterminants peuvent être exprimées sous la forme $\sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i [\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{d+1}][\mu_1,\ldots,\mu_{d-1},\lambda_i] = 0$. Ceci montre que la condition de la définition 3.1 est vérifiée en autant qu'il existe une matrice de coordonnées homogènes, $\chi(\lambda_1,\ldots,\lambda_d) =$ signe$[\lambda_1,\ldots,\lambda_d]$.

3.2 Remarque. Dans le cas simplicial, une matroïde orientée peut être définie comme une application $\chi\colon \Lambda(n,d) \to \{-1,+1\}$ avec la propriété suivante pour son unique extension alternée $\chi\colon \{1,\ldots,n\}^d \to \{-1,+1\}$: pour tout $\sigma \in \Lambda(n,d-2)$ et pour tout $\tau \in \Lambda(n,4)$, l'ensemble

$$\begin{Bmatrix} \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_1,\tau_2) \cdot \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_3,\tau_4), \\ -\chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_1,\tau_3) \cdot \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_2,\tau_4), \\ \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_1,\tau_4) \cdot \chi(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-2},\tau_2,\tau_3) \end{Bmatrix},$$

ou bien contient $\{-1,+1\}$, ou bien est égal à $\{0\}$.

3.3 Définition. On définit comme suit les *circuits* et les *cocircuits* d'une matroïde orientée. Pour $\lambda \in \Lambda(n,d-1)$ et $\mu \in \Lambda(n,d+1)$, on définit $C^*_\lambda, C_\mu \in \{-1,0,+1\}^n$ comme

$$C^*_\lambda(i) := \chi(\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1},i) \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,n$$

$$C_\mu(i) := \begin{cases} (-1)^j \chi(\mu_1,\ldots,\widehat{\mu_j},\ldots,\mu_{d+1}) & \text{si } i = \mu_j \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Maintenant $\mathcal{O}(\chi) := \{\pm C_\mu \mid \mu \in \Lambda(n,d+1)\}$ est l'ensemble des circuits de χ (les partitions de Radon dans le cas réalisable), et $\mathcal{O}^*(\chi) := \{\pm C^*_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(n,d-1)\}$ est l'ensemble de tous les cocircuits de χ (hyperplans dans le cas réalisable).

either contains $\{-1,+1\}$ or equals $\{0\}$.

3.3 Definition. For an oriented matroid we define *circuits* and *cocircuits* as follows.

For $\lambda \in \Lambda(n,d-1)$ and $\mu \in \Lambda(n,d+1)$ define C_λ^*, $C_\mu \in \{-1,0,+1\}^n$ to be

$$C_\lambda^*(i) := \chi(\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1},i) \qquad \text{for } i=1,\ldots,n$$

$$C_\mu(i) := \begin{cases} (-1)^j \chi(\mu_1,\ldots,\widehat{\mu_j},\ldots,\mu_{d+1}) & \text{if } i=\mu_j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Now $\mathcal{O}(\chi) := \{\pm C_\mu \mid \mu \in \Lambda(n,d+1)\}$ is the set of circuits of χ (Radon partitions in the realizable case), and $\mathcal{O}^*(\chi) := \{\pm C_\lambda^* \mid \lambda \in \Lambda(n,d-1)\}$ is the set of all cocircuits of χ (hyperplanes in the realizable case).

An oriented matroid χ of rank d with n vertices will be called *affine* or *acyclic* if for all $\lambda \in \Lambda(n,d+1)$ the set

$$\left\{(-1)^i \cdot \chi(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{d+1}) \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,d+1\}\right\}$$

either contains $\{-1,+1\}$ or equals $\{0\}$.

3.4 Definition. We call the pair $(\chi, \mathcal{C}_M)$ of an affine oriented matroid $\chi\colon \Lambda(7,4) \to \{-1,0,+1\}$ and the combinatorial complex $\mathcal{C}_M$ a *matroid manifold of Möbius' torus* if for every pair of an edge $\{i,j\}$ and a triangle $\{k,l,m\}$ of the combinatorial complex $\mathcal{C}_M$, there is no corresponding circuit X of χ with $X^+ := X^{-1}(\{-1\}) \subseteq \{i,j\}$ and $X^- := X^{-1}(\{+1\}) \subseteq \{k,l,m\}$, and $X^+, X^- \neq \emptyset$. Thus in the case of realizability of χ, there are no self-intersections. For such a matroid manifold, χ will be called *Möbius oriented matroid.*

Our definition of a matroid manifold generalizes the notion of a matroid polytope and can be extended to more general complexes.

3.5 Definition. With $\mathcal{M}$ we denote the set of all matroid manifolds of Möbius' torus, and with $\mathcal{M}_s$ the set of all simplicial matroid manifolds of Möbius' torus.

Given a permutation $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ and $\lambda \in \{1,\ldots,n\}^d$, we

Une matroïde orientée χ de rang d à n sommets sera dite *affine* ou *acyclique* si pour tout $\lambda \in \Lambda(n,d+1)$ l'ensemble

$$\left\{(-1)^i \cdot \chi(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{d+1}) \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,d+1\}\right\},$$

ou bien contient $\{-1,+1\}$, ou bien est égal à $\{0\}$.

3.4 Définition. Le couple $(\chi, \mathcal{C}_M)$ composé d'une matroïde orientée affine $\chi\colon \Lambda(7,4) \to \{-1,0,+1\}$ et du complexe combinatoire $\mathcal{C}_M$ sera appelé *variété matroïde du tore de Möbius* si pour toute paire composée d'une arête $\{i,j\}$ et d'un triangle $\{k,l,m\}$ du complexe combinatoire $\mathcal{C}_M$, il n'existe aucun circuit correspondant X de χ avec $X^+ := X^{-1}(\{-1\}) \subseteq \{i,j\}$ et $X^- := X^{-1}(\{+1\}) \subseteq \{k,l,m\}$, et $X^+, X^- \neq \emptyset$. Ainsi, dans le cas de la réalisabilité de χ, il n'y a aucune auto-intersection. Pour une telle variété matroïde, χ sera appelé une *matroïde orientée de Möbius.*

Notre définition d'une variété matroïde généralise la notion de polytope matroïde et peut être étendue à des complexes plus généraux.

3.5 Définition. On notera $\mathcal{M}$, l'ensemble de toutes les variétés matroïdes du tore de Möbius, et $\mathcal{M}_s$ l'ensemble de toutes les variétés matroïdes simpliciales du tore de Möbius.

Étant donné une permutation $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ et $\lambda \in \{1,\ldots,n\}^d$, on définit $\sigma\lambda \in \{1,\ldots,n\}^d$ par $(\sigma\lambda)_i = \sigma(\lambda_i)$. Avec une telle permutation σ et une matroïde orientée χ à n sommets, on définit une nouvelle matroïde orientée $\sigma\chi\colon \{1,\ldots,n\}^n \to \{-1,0,+1\}$ par $\lambda \mapsto (\sigma\chi)(\lambda) := \chi(\sigma^{-1}(\lambda))$. $\sigma\chi$ représente la matroïde orientée χ dont on aurait renuméroté les sommets selon σ. Le groupe de permutation S_n agit sur l'ensemble de toutes les matroïdes orientées de rang d à n sommets.

3.6 Définition. On dira que deux matroïdes orientées χ et χ' de rang d à n sommets sont H-équivalentes par rapport au sous-groupe H de S_n, si

$$\sigma\chi = +\chi' \quad \text{ou} \quad \sigma\chi = -\chi' \quad \text{pour un certain } \sigma \in H.$$

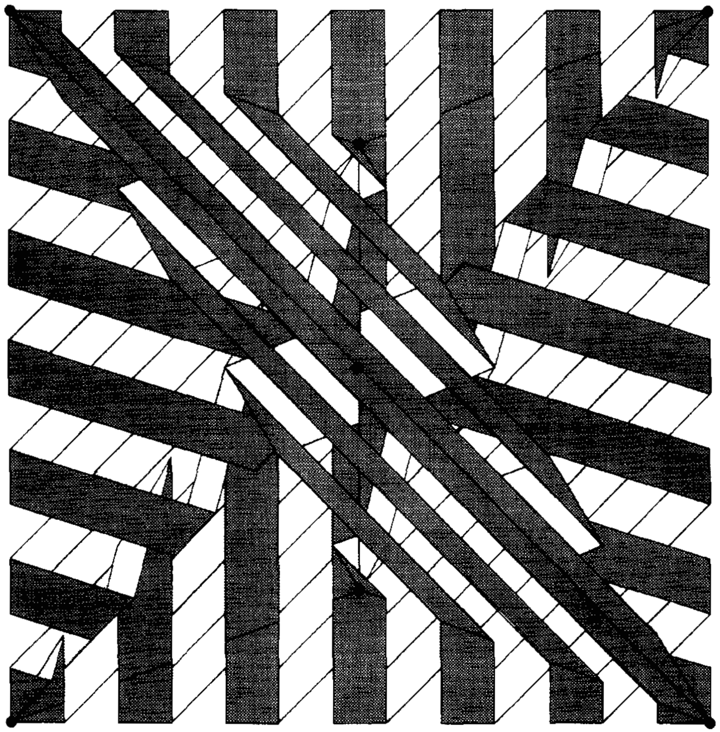
On s'intéressera particulièrement à la $H_{\mathcal{C}_M}$-équivalence, par laquelle le groupe $H_{\mathcal{C}_M}$ des automorphismes du complexe combinatoire du define $\sigma\lambda \in \{1,\ldots,n\}^d$ by $(\sigma\lambda)_i = \sigma(\lambda_i)$. For such a permutation σ and an oriented matroid χ with n vertices, we define a new oriented matroid $\sigma\chi : \{1,\ldots,n\}^n \to \{-1,0,+1\}$ by $\lambda \mapsto (\sigma\chi)(\lambda) := \chi(\sigma^{-1}(\lambda))$. $\sigma\chi$ represents the oriented matroid χ with renumbered vertices according to σ. The permutation group S_n acts on the set of all oriented matroids of rank d with n vertices.

3.6 Definition. We call two oriented matroids χ, χ' of rank d with n vertices H-equivalant with respect to the subgroup H of S_n, if

$$\sigma\chi = +\chi' \quad \text{or} \quad \sigma\chi = -\chi' \quad \text{for some } \sigma \in H.$$

Especially, we are interested in H_{C_7}-equivalence, whereby the group H_{C_7} of automorphisms of the combinatorial complex of Möbius' torus is considered.

FIGURE 2



tore de Möbius est considéré.

À l'aide de l'ordinateur, on détermine toutes les variétés matroïdes du tore de Möbius qui sont des matroïdes orienté es *simpliciales*.

3.7 Théorème. Il existe 2×2772 matroïdes orientées simpliciales qui sont des variétés matroïdes du tore de Möbi us. Selon la H_{C_7}-équivalence, il existe exactement 72 types différent s. On trouvera en annexe un représentant de chaque type.

Le nombre maximal de points extrêmes est 6. Ceci fournit une réponse affirmative à la conjecture de Reay, en partic ulier le problème 18.A3 dans [18].

3.8 Remarque. Toutes les matroïdes orientées à 7 sommets sont réalisables, voir [8].

4. SYMÉTRIES DES MATROÏDES ORIENTÉES

On dira d'un élément $\sigma : \{1,\ldots,7\} \to \{1,\ldots,7\}$ du groupe d'automorphisme H_{C_7} qu'il s'agit d'une *symétrie de la variété matroïde* χ si et seulement si

$$\sigma\chi = +\chi \quad \text{ou} \quad \sigma\chi = -\chi.$$

Puisqu'une réalisation géométrique symétrique induit une symétrie de la matroïde orientée correspondante, on a cherc hé des symétries dans la classe de nos 72 variétés matroïdes du to re de Möbius.

4.1 Théorème. Selon la H_{C_7}-équivalence, il existe exactement 12 variétés matroïdes simpliciales symétriques du tore de Möbius. L'ordre de symétrie est égal à 2 dans chaque cas. Une réalisation symétrique doit posséder une rotation de 180° comme automorphisme. Les types d'enveloppes convexes sont 6 fois un tétraèdre, 4 fois une double pyramide au-dessus d'un triangle, et deux fois un polytope placé sur une telle double pyramide. Les représenta nts typiques sont illustrés aux **figures 4 à 7**.

4.2 Remarque. Dans chaque cas, on a $\sigma\chi = +\chi$, la symétrie com-

Using a computer, we determined all matroid manifolds of Möbius' torus which are *simplicial* oriented matroids.

3.7 Theorem. There are 2×2772 simplicial oriented matroids which are matroid manifolds of Möbius' torus. Up to H_{C_u}-equivalence there are exactly 72 different types. A representant of each type is given in the Appendix.

The maximum number of extreme point is 6. This gives an affirmative answer to a conjecture of Reay, namely Problem 18.A3 in [18].

3.8 Remark. All oriented matroids with 7 vertices are realizable, see [8].

4. SYMMETRIES OF ORIENTED MATROIDS

We call an element σ: $\{1,\ldots,7\} \to \{1,\ldots,7\}$ of the automorphism group H_{C_u} a *symmetry of the matroid manifold* χ if and only if

$$\sigma\chi = +\chi \quad \text{ou} \quad \sigma\chi = -\chi.$$

Since a symmetric geometric realization induces a symmetry of the corresponding oriented matroid, we looked for symmetries in the class of our 72 matroid manifolds of Möbius' torus.

4.1 Theorem. Up to H_{C_u}-equivalence, there are exactly 12 symmetric simplicial matroid manifolds of Möbius' torus. The order of symmetry in each case is 2. A symmetrical realization has to have a rotation of 180° as an automorphism. Convex hull types are 6 times a tetrahedron, 4 times a double pyramid over a triangle, and twice a stack polytope over such a double pyramid. Typical representatives are depicted in **Figures 4 to 7**.

4.2 Remark. In all cases we have $\sigma\chi = +\chi$, the combinatorial symmetry preserves orientation. Therefore a symmetric realization has to have a symmetry with determinant +1.

4.3 Theorem. In all 12 cases of symmetric simplicial matroid binatoire préserve l'orientation. Ainsi, une réalisation symétrique doit posséder une symétrie de déterminant +1.

4.3 Théorème. Pour chacun des 12 cas de variétés matroïdes simpliciales symétriques du tore de Möbius, la variété matroïde est symétriquement réalisable et, de plus, la propriété d'isotopie est vérifiée même dans la classe des réalisations symétriques.

Démonstration. On ne fournit la preuve que pour la matroïde orientée χ_{b2} (voir annexe) qui est un représentant typique des 12 cas. χ_{b2} possède la symétrie (6)(14)(23)(57). On peut facilement obtenir une suite de résolution respectant la symétrie pour cette matroïde orientée.

La seule symétrie d'ordre 2 et de déterminant +1 est une rotation de 180° d'axe donné ; on peut ainsi, sans perte de généralité, choisir des coordonnées homogènes respectant la symétrie ci-dessus comme dans la matrice suivante.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & -c & -d \end{pmatrix}$$

La symétrie fait en sorte que seuls les déterminants suivants sont essentiels, et a, b, c, d représentent une réalisation de la matroïde orientée si et seulement si toutes ces variables constituent une solution du système d'inéquations suivant:

$$\begin{array}{lllll}
[1234] = & +4a & & & > 0 \\
[1235] = & +2a-2b & -2ac & & > 0 \\
[1236] = & +2a & & & -2 > 0 \\
[1237] = & +2a-2b & +2ac & & > 0 \\
[1245] = & \quad -2b & & -2ad & < 0 \\
[1246] = & & & & -2 < 0 \\
[1247] = & \quad -2b & & +2ad & < 0 \\
[1256] = & \quad +b+c-d & & +ad & -1 > 0 \\
[1257] = & & & +2ad+2bc-2bd & > 0 \\
[1267] = & \quad -b+c-d & & +ad & +1 < 0 \\
[1356] = & \quad -b-c-d & & +ad & +1 < 0 \\
[1357] = & & & +2ad-2bc-2bd & > 0
\end{array}$$

manifolds of Möbius' torus, the matroid manifold is symmetrically realizable and, moreover, the isotopy property holds even in the class of symmetric realizations.

Proof. We give the proof only for the oriented matroid χ_{b2} (cf. Appendix) which is typical for all the 12 cases. χ_{b2} has the symmetry (6)(14)(23)(57). One can get easily a solvability sequence for this oriented matroid, that respects the symmetry.

The only symmetry of order 2 with determinant +1 is a rotation of 180° with fixed axis, so without loss of generality we can choose homogeneous coordinates respecting the above symmetry as given in the following matrix.

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & a & 0 & -1\\ 1 & a & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & b & c & d\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & b & -c & -d\end{pmatrix}$$

Because of the symmetry, only the following determinants are essential, and a, b, c, d represent a realization of the oriented matroid if and only if all variables solve the following system of inequalities:

$$\begin{array}{ll}
[1234] = & +4a > 0\\
[1235] = & +2a-2b-2ac > 0\\
[1236] = & +2a-2 > 0\\
[1237] = & +2a-2b+2ac > 0\\
[1245] = & -2b-2ad < 0\\
[1246] = & -2 < 0\\
[1247] = & -2b+2ad < 0\\
[1256] = & +b+c-d+ad-1 > 0\\
[1257] = & +2ad+2bc-2bd > 0\\
[1267] = & -b+c-d+ad+1 < 0\\
[1356] = & -b-c-d+ad+1 < 0\\
[1357] = & +2ad-2bc-2bd > 0\\
[1367] = & +b-c-d+ad < 0\\
[1456] = & -2d < 0\\
[1457] = & -4bd < 0\\
[1567] = & -2d+2bd > 0\\
[2356] = & -2c+2ac < 0\\
[2357] = & +4ac-4bc < 0\\
[2567] = & -2c+2bc < 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
[1367] = & +b-c-d+ad < 0\\
[1456] = & -2d < 0\\
[1457] = & -4bd < 0\\
[1567] = & -2d+2bd > 0\\
[2356] = & -2c+2ac < 0\\
[2357] = & +4ac-4bc < 0\\
[2567] = & -2c+2bc < 0.
\end{array}$$

Par des arguments utilisant la condition du signe de la matroïde orientée issue des relations de Grassmann-Plücker, ainsi que la symétrie, on peut réduire le système à

$$d>0,\quad b>1,\quad -c>0,\quad a-b+ac>0,$$
$$b-ad>0,\quad ad+bc-bd>0,\quad b+c+d-ad-1>0,$$

qui contient toute l'information du système initial, c'est-à-dire que χ est réalisable si et seulement si les 7 inéquations sont résolubles en a, b, c et d, et de plus, toutes les réalisations peuvent être construites à partir du dernier système. On omettra la preuve de cette équivalence qui a été réalisée à l'aide de l'ordinateur.

La réduction finale à la main est directe et on l'omettra également.

La propriété d'isotopie du théorème est ensuite démontrée de façon semblable au cas non symétrique. Le théorème 4.3 est ainsi démontré pour cet exemple typique.

5. LE GRAPHE DES VARIÉTÉS MATROÏDES SIMPLICIALES DU TORE DE MÖBIUS

Le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ est défini comme suit: ses sommets sont les éléments de $\mathcal{M}_s$ et il y a une arête entre deux variétés matroïdes simpliciales du tore de Möbius χ et χ' si et seulement s'il existe exactement un $\lambda \in \Lambda(7,4)$ tel que $\chi(\lambda) \neq \chi'(\lambda)$.

Le théorème suivant nous fournit une propriété globale du graphe des matroïdes orientées de Möbius. Rappelons que H_{C_M} est engendré par les permutations ρ et τ définies à la section 2.

5.1 Théorème. $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ possède 12 composantes connexes. Soient A et B les composantes connexes contenant les matroïdes orientées

Arguments using the oriented matroid sign condition from Grassmann-Plücker relations together with symmetry reduce the system to

$$d>0,\quad b>1,\quad -c>0,\quad a-b+ac>0,$$
$$b-ad>0,\quad ad+bc-bd>0,\quad b+c+d-ad-1>0,$$

which still contains the full information, that is, χ is realizable if and only if the 7 inequalities are solvable in $a, b, c, d,$ and in addition, all realizations can be constructed from the remaining system as well. We omit the computer aided proof for this equivalence.

The final reduction by hand is straightforward and will be omitted here.

The isotopy property of the theorem is now achieved in a similar manner as in the non-symmetrical case. Thus Theorem 4.3 is proved for this typical example.

5. THE GRAPH OF SIMPLICIAL MATROID MANIFOLDS OF MÖBIUS' TORUS

We define a graph $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ as follows: the vertices are the elements of $\mathcal{M}_s$, and two simplicial matroid manifolds of Möbius' torus χ and χ' are joined by an edge if and only if there is exactly one $\lambda \in \Lambda(7,4)$ with $\chi(\lambda) \neq \chi'(\lambda)$.

The following theorem provides a global property of the graph of Möbius oriented matroids. Recall that H_{C_M} is generated by the permutations ρ and τ, as defined in Section 2.

5.1 Theorem. $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ has 12 components of connectivity. Let A and B denote the components of connectivity that contain the oriented matroids $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a24}$ and $\chi_{b1},\ldots,\chi_{b48}$, respectively (cf. Appendix). Then the 12 connected components are given by $\pm\rho^i A$ and $\pm\rho^i B$, where $i=0,1,2$. All these components $\pm\rho^i A$ and $\pm\rho^i B$ contain only oriented matroids H_{C_M}-equivalent to one of the oriented matroids $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a24}$ or $\chi_{b1},\ldots,\chi_{b48}$, respectively.

5.2 Remark. Let $\mathcal{G}' := \mathcal{G}(\mathcal{M}_s)/H_{C_M}$ denote the graph we obtain from $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a24}$ et $\chi_{b1},\ldots,\chi_{b48}$, respectivement (voir annexe). Alors, les 12 composantes connexes sont données par $\pm\rho^i A$ et $\pm\rho^i B$, où $i=0,1,2$. Toutes ces composantes $\pm\rho^i A$ et $\pm\rho^i B$ ne contiennent que des matroïdes orientées H_{C_M}-équivalentes à l'une des matroïdes orientées $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a24}$ ou $\chi_{b1},\ldots,\chi_{b48}$, respectivement.

5.2 Remarque. Soit $\mathcal{G}' := \mathcal{G}(\mathcal{M}_s)/H_{C_M}$ le graphe obtenu de $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ en identifiant deux sommets de $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ s'ils sont H_{C_M}-équivalents. $\mathcal{G}'$ possède alors 2 composantes connexes, A/H_{C_M} et B/H_{C_M}.

Le graphe A contient le sous-graphe A_0 illustré à la **figure 3**. Un 4-tuple à la frontière désigne l'orientation λ qui change dans la ligne ou la colonne correspondante. Soient $\alpha=(14)(23)(57)$ la symétrie des matroïdes orientées $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a5}$ et $\beta=(13)(47)(56)$ la symétrie de χ_{a24}. (On a $\alpha^{-1}=\alpha$ et $\beta^{-1}=\beta$.) α est une symétrie, ainsi les graphes A_0 et αA_0 ont les matroïdes orientées $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a5}$ en commun, et A_0 et αA_0 peuvent être ici collés l'un sur l'autre. De la même façon, on peut coller ensemble A_0 et βA_0, qui ont le sommet χ_{a24} en commun. Ici, on obtient les 4 arêtes additionnelles $\chi_{a8}-\beta\chi_{a23}$, $\chi_{a11}-\beta\chi_{a18}$, $\chi_{a18}-\beta\chi_{a11}$ et $\chi_{a23}-\beta\chi_{a8}$.

En général, pour une permutation γ, le sous-graphe γA_0 peut être collé à $(\gamma\alpha\gamma^{-1})\gamma A_0=\gamma\alpha A_0$ en utilisant les matroïdes orientées $\gamma\chi_{a1},\ldots,\gamma\chi_{a5}$, et à $\gamma\beta A_0$ en utilisant $\gamma\chi_{a24}$ (dans ce dernier cas, on obtiendra encore 4 arêtes additionnelles). Finalement, on obtient un graphe composé de 14 copies renumérotées de A_0 :

$$A_0-\beta A_0-\beta\alpha A_0-\beta\alpha\beta A_0-\ldots-(\beta\alpha)^6\beta A_0.$$

Nous avons maintenant $(\alpha\beta)^6=$identité, donc $(\alpha\beta)^6\beta=\alpha$ est vérifié, ainsi le dernier sous-graphe de cette suite doit être collé au premier. De cette construction, on obtient la composante connexe A de $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$.

Nous n'aborderons pas la structure plus complexe de B. (**Figure 3**)

6. RÉALISATIONS NON SIMPLICIALES

Cette section est consacrée aux réalisations non simpliciales. On verra qu'il est suffisant de connaître $\mathcal{M}_s$ pour trouver toutes les

$\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ by identifying two vertices of $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ if they are H_{C_M}-equivalent. Then $\mathcal{G}'$ has 2 connected components, namely A/H_{C_M} and B/H_{C_M}.

The graph A contains the subgraph A_0 shown in **Figure 3**. A 4-tuple at the boundary denotes the orientation λ that changes in the corresponding row or column. Let $\alpha = (14)(23)(57)$ denote the symmetry of the oriented matroids $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a5}$ and $\beta = (13)(47)(56)$ denote the symmetry of χ_{a24}. (We have $\alpha^{-1} = \alpha$ and $\beta^{-1} = \beta$.) α is a symmetry, so the graphs A_0 and αA_0 have the oriented matroids $\chi_{a1},\ldots,\chi_{a5}$ in common, and A_0 and αA_0 can be glued together here. In the same way, one can glue together A_0 and βA_0, which have the vertex χ_{a24} in common. Here, one gets the 4 additional edges $\chi_{a8} — \beta\chi_{a23}$, $\chi_{a11} — \beta\chi_{a18}$, $\chi_{a18} — \beta\chi_{a11}$ et $\chi_{a23} — \beta\chi_{a8}$.

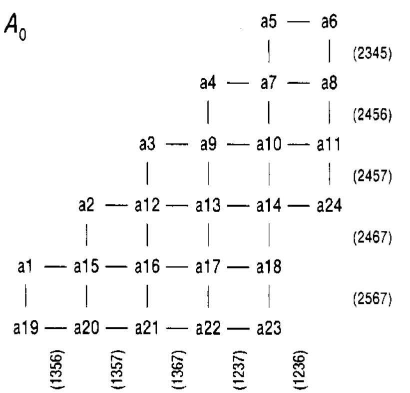
In general, for a permutation γ, the subgraph γA_0 can be glued together with $(\gamma\alpha\gamma^{-1})\gamma A_0 = \gamma\alpha A_0$ using the oriented matroids $\gamma\chi_{a1},\ldots,\gamma\chi_{a5}$, and with $\gamma\beta A_0$ using $\gamma\chi_{a24}$ (in the latter case, one gets 4 additional edges again). Finally, one obtains a graph of 14 renumbered copies of A_0:

$$A_0 — \beta A_0 — \beta\alpha A_0 — \beta\alpha\beta A_0 — \ldots — (\beta\alpha)^6\beta A_0.$$

Now we have $(\alpha\beta)^6 = \mathrm{id}$, hence $(\alpha\beta)^6\beta = \alpha$ holds, so the last subgraph in this sequence has to be glued together with the first. With this construction, one obtains the component of connectivity A of $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$.

We do not discuss the more complicated structure of B. (**Figure 3**)

FIGURE 3



6. NON-SIMPLICIAL REALIZATIONS

This section is devoted to non-simplicial realizations. It will be seen that it is sufficient to know $\mathcal{M}_s$ in order to find all matroid manifolds of Möbius' torus (i.e. the set $\mathcal{M}$).

6.1 Theorem. For all Möbius oriented matroids $\chi_0 \in \mathcal{M}$ and all $\bar{\lambda} \in \Lambda(7,4)$ with $\chi_0(\bar{\lambda}) = 0$, there exist χ_+, $\chi_- \in \mathcal{M}$ such that

$$\chi_+(\bar{\lambda}) = +1, \quad \chi_-(\bar{\lambda}) = -1$$

variétés matroïdes du tore de Möbius (c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{M}$).

6.1 Théorème. Pour toutes matroïdes orientées de Möbius $\chi_0 \in \mathcal{M}$ et tout $\bar{\lambda} \in \Lambda(7,4)$ tels que $\chi_0(\bar{\lambda}) = 0$, il existe χ_+, $\chi_- \in \mathcal{M}$ tels que

$$\chi_+(\bar{\lambda}) = +1, \quad \chi_-(\bar{\lambda}) = -1$$

et

$$\chi_+(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \chi_-(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda(7,4) \setminus \{\bar{\lambda}\}.$$

De plus, il existe des réalisations R_+, R_0 et R_- de χ_+, χ_0 et de χ_-, respectivement, et une isotopie qui transforme R_+ en R_0 et en R_-.

Démonstration. Soit $\chi_0 \in \mathcal{M}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\chi_0(\bar{\lambda}) = 0$ pour $\bar{\lambda} = (1,2,3,4)$. Si $\bar{\lambda} \neq (1,2,3,4)$, on renumérote les sommets de χ_0 selon un certain $\sigma \in S_n$. La matroïde orientée χ_0 est réalisable. Soit $R_0 = (x_1,\ldots,x_7)$ une réalisation de χ_0. On désigne par $\mathcal{X}(R)$ la matroïde orientée correspondant à R.

On procède en montrant qu'il existe un point $x_i \in \{x_1,\ldots,x_4\}$, une direction u et une valeur (suffisamment petite) $t \geq 0$ tels que pour les matroïdes orientées $\chi_\pm = \mathcal{X}(R_\pm)$ de $R_\pm := (x_1,\ldots,x_i \pm tu,\ldots,x_7)$, on a

$$\chi_+(\bar{\lambda}) = +1, \quad \chi_-(\bar{\lambda}) = -1,$$
$$\chi_+(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \chi_-(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda(7,4) \setminus \{\bar{\lambda}\} \quad \text{et}$$
$$\chi_\pm \in \mathcal{M}.$$

(L'isotopie est alors donnée par $\tau \mapsto (x_1,\ldots,x_i + \tau u,\ldots,x_7)$: $[-t,t] \to (\mathbb{R}^3)^7$.)

Si t est suffisamment petit, aucune nouvelle intersection entre les arêtes et les triangles du complexe combinatoire C_M n'apparaîtra.

On parle dans ce cas d'un *mouvement admissible* du point x_i. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on considère les plans H déterminés par les enveloppes affines des sous-ensembles de $\{x_1,\ldots,x_7\}$ qui sont des contraintes pour notre point x_i, c'est-à-dire que le déterminant correspondant à un $\lambda \in \Lambda(7,4)$ contenant i s'annule, $\chi_0(\lambda) = 0$. On appelle un tel plan H une *contrainte linéaire* pour x_i. Par exemple, $H := \mathrm{aff}\{x_1,\ldots,x_4\}$ est une contrainte linéaire pour x_1, x_2, x_3 et x_4.

and $\qquad \chi_+(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \chi_-(\lambda)$ for all $\lambda \in \Lambda(7,4) \setminus \{\bar{\lambda}\}$.

Moreover, there are realizations R_+, R_0 and R_- of χ_+, χ_0 and χ_-, respectively, and an isotopy which transforms R_+ into R_0 and into R_-.

Proof. Let $\chi_0 \in \mathcal{M}$ be given. Without loss of generality, we may assume $\chi_0(\bar{\lambda}) = 0$ for $\bar{\lambda} = (1,2,3,4)$. If $\bar{\lambda} \neq (1,2,3,4)$, we renumber the vertices of χ_0 according to some $\sigma \in S_n$. The oriented matroid χ_0 is realizable. Let $R_0 = (x_1,\ldots,x_7)$ be a realization of χ_0. By $\mathcal{X}(R)$, we denote the oriented matroid corresponding to R.

We proceed in showing that there is a point $x_i \in \{x_1,\ldots,x_4\}$, a direction u and a (sufficiently small) $t \geq 0$ such that for the oriented matroids $\chi_\pm = \mathcal{X}(R_\pm)$ of $R_\pm := (x_1,\ldots,x_i \pm tu,\ldots,x_7)$, we have

$$\chi_+(\bar{\lambda}) = +1, \quad \chi_-(\bar{\lambda}) = -1,$$
$$\chi_+(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \chi_-(\lambda) \text{ for all } \lambda \in \Lambda(7,4) \setminus \{\bar{\lambda}\} \quad \text{and}$$
$$\chi_\pm \in \mathcal{M}.$$

(The isotopy is then given by $\tau \mapsto (x_1,\ldots,x_i + \tau u,\ldots,x_7)$: $[-t,t] \to (\mathbb{R}^3)^7$.)

If t is sufficiently small, no new intersections between edges and triangles of the combinatorial complex C_M will occur.

In this case, we speak of an *admissible motion* of the point x_i. For $i \in \{1,2,3,4\}$ we consider those planes H determined by affine hulls of subsets of $\{x_1,\ldots,x_7\}$ which are constraints for our point x_i, i.e. the determinant corresponding to a $\lambda \in \Lambda(7,4)$ containing i vanishes, $\chi_0(\lambda) = 0$. We call such a plane H a *linear constraint* for x_i. For example, $H := \mathrm{aff}\{x_1,\ldots,x_4\}$ is a linear constraint for x_1, x_2, x_3 and x_4.

The following lemma holds for more general situations.

Lemma. No plane affinely spanned by points of $R_0 = (x_1,\ldots,x_7)$ with $\mathcal{X}(R_0) \in \mathcal{M}$ contains more than 4 points of R_0, and no line affinely spanned by points of R_0 contains more than 2 points of R_0.

Le lemme suivant est valide dans des situations plus générales.

Lemme. Aucun plan engendré de façon affine par des points de $R_0 = (x_1,\ldots,x_7)$ où $\mathcal{X}(R_0) \in \mathcal{M}$ ne contient plus de 4 points de R_0, et aucune droite engendrée de façon affine par des point de R_0 ne contient plus de 2 points de R_0.

Ceci est une conséquence de la complétude du graphe-arête du tore de Möbius et du fait que le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

On tente maintenant de choisir un point x_1 pour un mouvement admissible et on a à considérer les cas suivants: $(k) = (1),\ldots,(4)$, pour lesquels dans le cas (k) le point x_1 est contenu dans exactement k contraintes linéaires.

Les cas (1) et (2) sont triviaux par rapport à (3).

Dans le cas (3), on voit que, ou bien les 3 contraintes linéaires se rencontrent en exactement un point (c'est-à-dire, en x_1) et le mouvement admissible se situe le long de la droite d'intersection des contraintes linéaires différentes de $\mathrm{aff}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, ou bien les trois contraintes linéaires se rencontrent en une droite. Mais ce dernier cas est impossible à cause du lemme et parce que nous n'avons que 7 points en tout.

Dans le cas (4), on sait par le cas précédent que chaque triplet de contraintes linéaires possède exactement un point d'intersection. On montre dans ce qui suit que ceci ne peut survenir simultanément pour tous les points x_1, x_2, x_3 et x_4. Si cela arrive, on utilise

(i) $\mathrm{aff}\{x_1,\ldots,x_4\}$ est une contrainte linéaire,

(ii) deux contraintes linéaires différentes ne possèdent pas plus de 2 points de R_0 en commun,

(iii) chaque point x_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ doit appartenir à au moins 4 contraintes linéaires.

Ceci implique nécessairement la liste suivante de contraintes linéaires de χ_0 (ici, i désigne x_i):

This follows from the completeness of the edge graph of Möbius' torus and from the fact that the complete graph K_5 is not planar.

Now we try to choose point x_1 for an admissible motion first and have to consider the following cases $(k) = (1),\ldots,(4)$, where in case (k) point x_1 is contained in exactly k linear constraints.

Cases (1) and (2) are trivial compared with (3).

In case (3), we find either that all 3 linear constraints meet in exactly one point (i.e. in x_1) and the admissible motion is along the intersection line of those linear constraints different from $\mathrm{aff}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, or that all 3 linear constraints meet in a line. But the last case is impossible because of the Lemma and because we have only 7 points together.

In case (4) we know from the last case that every 3 linear constraints meet in exactly one point. We show in the following that this can not happen for all points x_1, x_2, x_3 and x_4, simultaneously. If it does, we use

(i) $\mathrm{aff}\{x_1,\ldots,x_4\}$ is a linear constraint,

(ii) two different linear constraints have not more than 2 points of R_0 in common,

(iii) each point x_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ must be contained in at least 4 linear constraints.

This implies necessarily the following list of linear constraints of χ_0 (here i denotes x_i):

aff{	1	2	3	4				}
aff{	1	2			5	6		}
aff{	1		3		5		7	}
aff{	1			4		6	7	}
aff{		2	3			6	7	}
aff{		2		4	5		7	}
aff{			3	4	5	6		}

aff{	1	2	3	4				}
aff{	1	2			5	6		}
aff{	1		3		5		7	}
aff{	1			4		6	7	}
aff{		2	3			6	7	}
aff{		2		4	5		7	}
aff{			3	4	5	6		}

D'après le lemme, il n'existe pas d'autre λ tel que $\chi_0(\lambda)=0$. Ainsi, $|\chi_0|$ est uniquement déterminé, et définit la matroïde sous-jacente correspondante comme le dual de la matroïde de Fano qu'on sait non réalisable. Cette contradiction termine la preuve du théorème 5.

Le théorème suivant traite d'un énoncé inverse.

6.3 Théorème. Étant données deux matroïdes orientées de Möbius χ_+ et χ_- dans $\mathcal{M}$ et $\bar{\lambda} \in \Lambda(7,4)$ tels que

$$\chi_+(\bar{\lambda}) = +1, \quad \chi_-(\bar{\lambda}) = -1$$

et $$\chi_+(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \chi_-(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda(7,4) \setminus \{\bar{\lambda}\}.$$

Alors la transformation $\chi_0\colon \Lambda(7,4) \to \{-1,0,+1\}$ où $\chi_0(\bar{\lambda}) = 0$ et

$$\chi_0(\lambda) = \chi_+(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda(7,4)$$

est encore une matroïde orientée et, de plus, $\chi_0 \in \mathcal{M}$.

6.4 Remarque. Cette affirmation demeure vraie même lorsque $\mathcal{M}$ est l'ensemble de toutes les variétés matroïdes correspondant à un complexe combinatoire bidimensionnel.

Démonstration. (du théorème 6.3) On doit démontrer (a) que χ_0 est une matroïde orientée affine, et (b) que χ_0 ne contient aucun circuit inadmissible de la variété de Möbius.

(a) Pour $\chi_0\colon \Lambda(7,4) \to \{-1,0,+1\}$ (avec son unique extension alternée), on montre que pour tout $\lambda \in \Lambda(7,5)$: l'ensemble

$$S_{\chi_0,\lambda} := \left\{(-1)^i \cdot \chi_0(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5) \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,5\}\right\},$$

ou bien contient $\{-1,+1\}$, ou bien est égal à $\{0\}$. Il suffit de considérer

There are no more λ with $\chi_0(\lambda)=0$ because of the Lemma. Thus $|\chi_0|$ is defined uniquely and defines the corresponding underlying matroid to be the dual of the Fano matroid which is known to be non-realizable. This contradiction finishes the proof of Theorem 5.

The next theorem deals with a converse statement.

6.3 Theorem. Given two Möbius oriented matroids χ_+ and χ_- in $\mathcal{M}$ and $\bar\lambda \in \Lambda(7,4)$ with

$$\chi_+(\bar\lambda) = +1, \quad \chi_-(\bar\lambda) = -1$$

and $$\chi_+(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \chi_-(\lambda) \text{ for all } \lambda \in \Lambda(7,4) \setminus \{\bar\lambda\}.$$

Then the mapping $\chi_0\colon \Lambda(7,4) \to \{-1,0,+1\}$ defined by $\chi_0(\bar\lambda)=0$

and $$\chi_0(\lambda) = \chi_+(\lambda) \text{ for all } \lambda \in \Lambda(7,4)$$

is again an oriented matroid and, moreover, $\chi_0 \in \mathcal{M}$.

6.4 Remark. This assertion carries over whenever $\mathcal{M}$ is the set of all matroid manifolds corresponding to a 2-dimensional combinatorial complex.

Proof. (of Theorem 6.3) We have to show (a) that χ_0 is an affine oriented matroid, and (b) that χ_0 does not contain an unallowed circuit of the Möbius manifold.

(a) For $\chi_0\colon \Lambda(7,4) \to \{-1,0,+1\}$ (with its unique alternating extension) we show for all $\lambda \in \Lambda(7,5)$: the set

$$S_{\chi_0,\lambda} := \left\{(-1)^i \cdot \chi_0(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5) \mid i \in \{1,\ldots,5\}\right\},$$

either contains $\{-1,+1\}$ or equals $\{0\}$. It suffices to consider those $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_5)\in\Lambda(7,5)$ such that for the given $\bar\lambda=(\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_5)\in\Lambda(7,4)$ we have $\{\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_4\} \subseteq \{\lambda_1,\ldots,\lambda_5\}$. $\chi_\pm(\bar\lambda) \neq 0$ shows that $S_{\chi_\pm,\lambda} \neq \{0\}$, hence

$$S_{\chi_+,\lambda} \supseteq \{-1,+1\} \quad \text{and} \quad S_{\chi_-,\lambda} \supseteq \{-1,+1\},$$

because χ_+ and χ_- are affine.

Now write down the sets

seulement les $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_5)\in\Lambda(7,5)$ qui sont tels que pour un $\bar\lambda=(\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_5)\in\Lambda(7,4)$ donné, on ait $\{\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_4\} \subseteq \{\lambda_1,\ldots,\lambda_5\}$. $\chi_\pm(\bar\lambda)\neq 0$ montre que $S_{\chi_\pm,\lambda}\neq\{0\}$, donc

$$S_{\chi_+,\lambda} \supseteq \{-1,+1\} \quad \text{et} \quad S_{\chi_-,\lambda} \supseteq \{-1,+1\},$$

car χ_+ et χ_- sont affines.

Inscrivons maintenant les ensembles

$S_{\chi_+,\lambda} = \{+1,\ldots,-1,\ldots,\ldots,\ldots\}$,

$S_{\chi_-,\lambda} = \{-1,\ldots,\ldots,\ldots,+1,\ldots\}$,

où $\chi_\pm(\bar\lambda)$ est le premier nombre. Les ensembles ne diffèrent qu'à cette entrée. Considérons

$$S_{\chi_0,\lambda} = \{0,\ldots,-1,\ldots,+1,\ldots\},$$

pour voir que $\{-1,+1\} \subseteq S_{\chi_0,\lambda}$. Ceci démontre que χ_0 est affine.

La propriété de matroïde orientée est observée de façon similaire comme suit. χ_0 est une matroïde orientée, si pour tout $\lambda\in\Lambda(7,5)$ et pour tout $\mu\in\Lambda(7,3)$ l'ensemble

$$S_{\chi_0,\lambda,\mu} := \left\{(-1)^i \cdot \chi_0(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_i)\cdot\chi_0(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5) \mid i\in\{1,\ldots,5\}\right\},$$

ou bien contient $\{-1,+1\}$, ou bien est égal à $\{0\}$. Soient $\lambda\in\Lambda(7,5)$ et $\mu\in\Lambda(7,3)$ choisis de façon arbitraire, mais fixés, et considérons l'ensemble de produits

$$\left\{(-1)^i \cdot \chi_0(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_i)\cdot\chi_0(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5) \mid i\in\{1,\ldots,5\}\right\}$$

et les 4-tuples correspondants utilisés comme arguments.

Si $\bar\lambda$ apparaît au plus une fois, on en viendra à la conclusion de la même façon que plus haut.

Si $\bar\lambda$ apparaît au moins deux fois, on a

$$\bar\lambda = \{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_j\} = \{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5\}$$

pour un choix approprié de i et j ($i\neq j$). On peut supposer, sans perte de généralité, que $\bar\lambda=(abcd)$, $\lambda=(abcde)$ et $\mu=(abc)$. On peut alors écrire l'ensemble de la façon suivante

$$S_{\chi_+,\lambda} = \{+1,\ldots,-1,\ldots,\ldots,\ldots\},$$

$$S_{\chi_-,\lambda} = \{-1,\ldots,\ldots,\ldots,+1,\ldots\},$$

where $\chi_\pm(\bar{\lambda})$ is the first number. The sets differ only at this entry. Consider

$$S_{\chi_0,\lambda} = \{0,\ldots,-1,\ldots,+1,\ldots\},$$

to see $\{-1,+1\} \subseteq S_{\chi_0,\lambda}$. This shows that χ_0 is affine.

The oriented matroid property is seen in a similar way as follows. χ_0 is an oriented matroid, if for all $\lambda \in \Lambda(7,5)$ and for all $\mu \in \Lambda(7,3)$ the set

$$S_{\chi_0,\lambda,\mu} := \left\{(-1)^i \cdot \chi_0(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_i) \cdot \chi_0(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5) \mid i \in \{1,\ldots,5\}\right\}$$

either contains $\{-1,+1\}$ or equals $\{0\}$. Let $\lambda \in \Lambda(7,5)$ and $\mu \in \Lambda(7,3)$ be arbitrary, but fixed, and consider the set of products

$$\left\{(-1)^i \cdot \chi_0(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_i) \cdot \chi_0(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_5) \mid i \in \{1,\ldots,5\}\right\}$$

and the corresponding 4-tuples used as arguments.

If $\bar{\lambda}$ occurs at most once, we come to the conclusion in the same way as above.

If $\bar{\lambda}$ occurs at least twice, we have

$$\bar{\lambda} = \{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda_i\} = \{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_j},\ldots,\lambda_5\}$$

for suitable i, j and $i \neq j$. Without loss of generality we assume $\bar{\lambda} = (abcd)$, $\lambda = (abcde)$ and $\mu = (abc)$. The set can now be written down as follows

$$S_{\chi_0,\lambda,\mu} := \{\chi_0(abca) \cdot \chi_0(bcde), -\chi_0(abcb) \cdot \chi_0(acde),$$
$$\chi_0(abcc) \cdot \chi_0(abde), -\chi_0(abcd) \cdot \chi_0(abce), \chi_0(abce) \cdot \chi_0(abcd)\}$$

and equals $\{0\}$.

(b) Assume χ_0 contains an unallowed circuit X. Without loss of generality, let $X^+ \subseteq \{4,5\}$ and $X^- \subseteq \{1,2,3\}$, compare Definition 3.4. $\bar{\chi} := (\chi_0 \setminus \{6\}) \setminus \{7\}$ is again an affine chirotope. We can assume that $\bar{\chi}$ is one of the following types:

$$S_{\chi_0,\lambda,\mu} := \{\chi_0(abca) \cdot \chi_0(bcde), -\chi_0(abcb) \cdot \chi_0(acde),$$
$$\chi_0(abcc) \cdot \chi_0(abde), -\chi_0(abcd) \cdot \chi_0(abce), \chi_0(abce) \cdot \chi_0(abcd)\}$$

et est égal à $\{0\}$.

(b) Supposons que χ_0 contient un circuit inadmissible X. Sans perte de généralité, soient $X^+ \subseteq \{4,5\}$ et $X^- \subseteq \{1,2,3\}$, à comparer à la définition 3.4. $\bar{\chi} := (\chi_0 \setminus \{6\}) \setminus \{7\}$ est encore un chirotope affine. On peut supposer que $\bar{\chi}$ est de l'un des types suivants :

1234	+++++++	+++++++	0000000	0
1235	-------	0000000	-------	0
1245	-0--00-	-0--00-	-0--00-	0
2345	--0-0-0	--0-0-0	--0-0-0	0
3145	---0-00	---0-00	---0-00	0

Mais dans chacun de ces cas, l'un ou l'autre de χ_+ ou de χ_- contient un circuit inadmissible ou n'est pas affine. On a ainsi démontré le théorème 6.3.

Les deux précédents théorèmes mènent au corollaire suivant.

6.5 Corollaire. Soient R_1 et R_2 deux réalisations de variétés matroïdes simpliciales du tore de Möbius appartenant à la même composante connexe du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$. Il existe alors un mouvement continu amenant R_1 à R_2 sans avoir à quitter la classe des réalisations des matroïdes orientées de Möbius.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une réponse complète au problème 18.A5 de [18]. Deux réalisations géométriques R_0 et R_1 du tore de Möbius sont dites *équivalentes* s'il existe un mouvement continu des sept sommets de R_0 vers les sommets de R_1. En se basant sur le corollaire 6.5 et le théorème 5.1, on peut aisément vérifier le fait suivant.

6.6 Théorème. La relation d'équivalence définie ci-dessus induit une partition de l'ensemble de toutes les réalisations du tore de Möbius en exactement 2 classes.

Les 24 premières matroïdes orientées de l'annexe appartiennent à

1234	+++++++	+++++++	0000000	0
1235	-------	0000000	-------	0
1245	-0--00-	-0--00-	-0--00-	0
2345	--0-0-0	--0-0-0	--0-0-0	0
3145	---0-00	---0-00	---0-00	0

But in all these cases either χ_+ or χ_- contains an unallowed circuit or is not affine. Thus we have proved Theorem 6.3.

The last two Theorems lead to the following corollary.

6.5 Corollary. For two realizations R_1 and R_2 of simplicial matroid manifolds of Möbius' torus belonging to the same connected component of the graph $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$, there is a continuous motion taking R_1 to R_2 such that the class of realizations of Möbius oriented matroids has not to be left.

Now, we are able to give a complete answer to Problem 18.A5 in [18]. Two geometric realizations R_0 and R_1 of Möbius' torus are said to be *equivalent*, if there is a continuous motion of the seven vertices of R_0 into the vertices of R_1. Putting Corollary 6.5 and Theorem 5.1 together, the following fact is now easily seen to be true.

6.6 Theorem. The equivalence relation defined above partitions the set of all realizations of Möbius' torus into exactly 2 classes.

The first 24 oriented matroids in the Appendix belong to realizations to one of these classes, let us call it the a-class. The other 48 oriented matroids belong to the other class, which we will call the b-class.

Thus, the conjecture in [18] that follows Problem 18.A5 is true, but the second conjecture mentioned thereafter, namely that two realizations with different number of exposed vertices are not equivalent, is wrong. For example, Császár's torus is a realization of χ_{a24} and has 5 exposed vertices, and this realization is equivalent to any realization of χ_{a1} which has only 4 exposed vertices.

A closer inspection reveals the following phenomena: firstly, in any realization of the a-class, e.g. the path $1 \to 4 \to 7$ runs *around* the

des réalisations de l'une de ces classes; appelons-la la classe a. Les 48 autres matroïdes orientées appartiennent à l'autre classe, qu'on appellera la classe b.

Ainsi, la conjecture qui suit le problème 18.A5 dans [18] est vraie, mais la seconde conjecture présentée plus loin, affirmant que deux réalisations ayant un nombre différent de sommets exposés ne sont pas équivalentes, est fausse. Par exemple, le tore de Császár est une réalisation de χ_{a24} et possède 5 sommets exposés, et cette réalisation est équivalente à n'importe quelle réalisation de χ_{a1} qui ne possède que 4 sommets exposés.

Une inspection plus minutieuse révèle le phénomène suivant : en premier lieu, dans n'importe quelle réalisation de la classe a, par exemple le chemin $1 \to 4 \to 7$ tourne *autour* du « trou » du tore, tandis que dans n'importe quelle réalisation de la classe b, il tourne au *travers* du trou (c'est-à-dire, « autour du *corps* ») du tore.

Deuxièmement, il est en fait possible de trouver un mouvement continu débutant à une quelconque réalisation du tore de Möbius qui est topologiquement équivalent à la « rotation » d'un tore rond autour de son cercle intérieur. (Dans le cas d'une réalisation de la classe a, ce mouvement correspond à un chemin dans le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ passant par chacun des sous-graphes $A_0, \beta A_0, \beta\alpha A_0, \ldots$ qui sont décrits à la section 5.)

7. RÉALISATIONS SYMÉTRIQUES

En conclusion, on démontre la forme de quatre variantes essentielles de réalisations symétriques du tore de Möbius. On a tracé dans chaque cas les projections orthogonales du modèle en étapes successives de complétude. L'illustration suivante contient toujours les triangles précédents, les nouveaux triangles sont hachurés et ils sont situés par-dessus les précédents. On donne grossièrement la hauteur de chaque point par les valeurs croissantes 0, +, ++, +++, ++++. On peut, dans une certaine mesure, choisir arbitrairement la valeur exacte. Ceci est aisément observable par la structure particulière de chaque exemple.

"hole" of the torus, whereas in any realization from the b-class it runs *through* the hole (i.e. "around the *body*") of the torus.

Secondly, it is in fact possible to find a continuous motion of starting at any realization of Möbius' torus that is topologically equivalent to the "rotation" of a round torus around the circle in its interior. (In the case of a realization from the a-class, this motion corresponds to a path in the graph $\mathcal{G}(\mathcal{M}_s)$ that passes each of the subgraphs A_0, βA_0, $\beta\alpha A_0$,... that are described in Section 5.

7. SYMMETRIC REALIZATIONS

In conclusion, we demonstrate the shape of four essential variants of symmetric realizations of Möbius' torus. In each case we have drawn orthogonal projections of the model in successive stages of completeness. The next picture always contains the previous triangles, the new triangles are striped, and they are located on top of the foregoing. The height of each point is given roughly by the increasing values 0, +, ++, +++, ++++. The exact value can be chosen arbitrarily up to a certain extent. This is seen easily from the particular structure for each example.

Figure 4 shows Császár's example with the extreme points 1, 2, 3, 4, 7 and the symmetry (2)(13)(47)(56), (type a24).

La **figure 4** montre l'exemple de Császár avec com me points extrêmes 1, 2, 3, 4, 7 et comme symétrie (2)(13)(47)(56), (type a24).

De la liste des bases signées

signe[1234] = +	signe[1235] = +	signe[1236] = –	signe[1237] = –
signe[1245] = –	signe[1246] = –	signe[1247] = –	signe[1256] = –
signe[1257] = –	signe[1267] = –	signe[1345] = +	signe[1346] = +
signe[1347] = +	signe[1356] = +	signe[1357] = +	signe[1367] = +
signe[1456] = +	signe[1457] = +	signe[1467] = +	signe[1567] = +
signe[2345] = –	signe[2346] = –	signe[2347] = –	signe[2356] = –
signe[2357] = –	signe[2367] = –	signe[2456] = –	signe[2457] = –
signe[2467] = +	signe[2567] = +	signe[3456] = –	signe[3457] = –
signe[3467] = –	signe[3567] = –	signe[4567] = –	

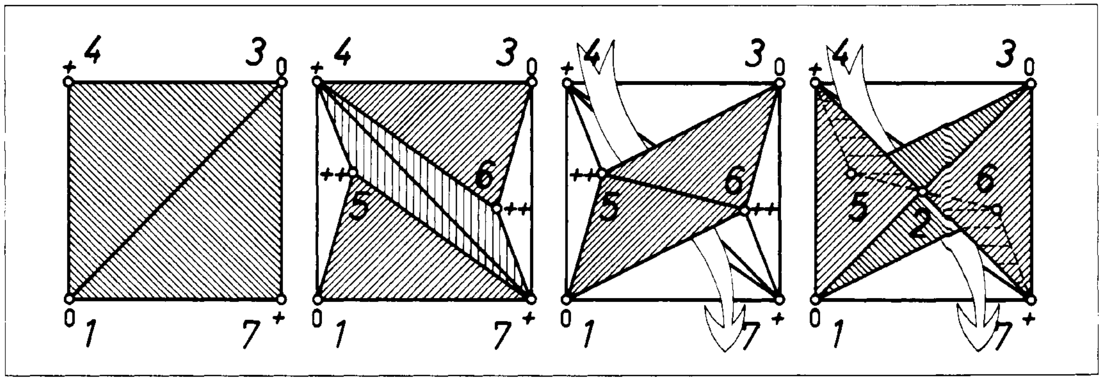
il est maintenant facilement vérifiable que les points 1, 3, 4 déterminent une face. Ou que le plan contenant 1, 2, 4 sépare 5 de 3, 6, 7.

L'exemple suivant, la **figure 5**, tient lieu de représentant pour les types a1,...,a5 selon le choix des points 5 et 7.

La **figure 6** tient lieu de représentant pour les matroïdes orientées de Möbius b1, b2 ou b3 selon le choix des points 5 et 7.

Enfin, la **figure 7** montre les types de réalisations correspondant à b46, b47 ou b48 selon le choix des points 6 et 7.

FIGURE 4



From the list of signed bases

sign[1234] = +	sign[1235] = +	sign[1236] = –	sign[1237] = –
sign[1245] = –	sign[1246] = –	sign[1247] = –	sign[1256] = –
sign[1257] = –	sign[1267] = –	sign[1345] = +	sign[1346] = +
sign[1347] = +	sign[1356] = +	sign[1357] = +	sign[1367] = +
sign[1456] = +	sign[1457] = +	sign[1467] = +	sign[1567] = +
sign[2345] = –	sign[2346] = –	sign[2347] = –	sign[2356] = –
sign[2357] = –	sign[2367] = –	sign[2456] = –	sign[2457] = –
sign[2467] = +	sign[2567] = +	sign[3456] = –	sign[3457] = –
sign[3467] = –	sign[3567] = –	sign[4567] = –	

it is now easy to check that the points 1, 3, 4 determine a facet. Or that the plane containing 1, 2, 4 separates 5 from 3, 6, 7.

The next example, **Figure 5**, stands as a representative for types a1,. . .,a5 depending on the choice of the points 5 and 7.

Figure 6 stands as a representative for the Möbius oriented matroids b1, b2 or b3 depending on the choice of the points 5 and 7.

Finally, **Figure 7** shows the realization types corresponding to b46, b47 or b48 depending on the choice of the points 6 and 7.

REFERENCES / RÉFÉRENCES

[1] A. Altshuler
"Polyhedral realization in R^3 of triangulations of the torus and 2-manifolds in cyclic 4-polytopes."
Discr. Math. 1, No.3 (1971), 211–238.

[2] A. Altshuler
"Hamiltonian circuits in some maps on the torus."
Discr. Math. 1, No.4 (1972), 299–314.

[3] A. Bachem
"Convexity and Optimization in discrete Structures."
In "Convexity and Applications", P.M. Gruber, J.M. Wills (Eds.), Birkhaüser, Basel (1983).

[4] D. Barnette
"Polyhedral maps on 2-manifolds. Convexity and related combinatorial geometry."
Proceedings of the Second University of Oklahoma Conference, ed. Kay, D.C.; Breen, M.

[5] D. Barnette
"All triangulations of the projective plane are geometrically realizable in E^4."
Israel J. Math. 44,1 (1983) 75–87.

[6] U. Betke, P. Gritzmann
"Polyedrische 2-Mannigfaltigkeiten mit wenigen nicht-konvexen Ecken."
Mh. Math. 97 (1984), 1–21.

[7] R. Bland, M. Las Vergnas
"Orientability of matroids."
Journ. Comb. Theory Ser. B 24 (1978), 94–123.

[8] J. Bokowski, J. Richter-Gebert
On the classification of non-realizable oriented matroids. Part I: generation, Part II: properties.
Manuscript (1990), 23 p.

[9] J. Bokowski, B. Sturmfels
"Computational synthetic geometry."
Lecture Notes in Mathematics, Springer 1355, Heidelberg (1989).

[10] D.W. Crowe
"Steiner triple systems, Heawood's torus coloring, Császár's polyhedron, Room designs, and bridge tournaments."
Delta, 3 (1972), 27–32.

[11] A. Császár
"A polyhedron without diagonals."
Acta Sci. Math. Szeged., 13 (1949), 140–142.

[12] R.A. Duke
"Geometric embedding of complexes."
Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 597–603.

[13] B. Grünbaum
Convex Polytopes.
Interscience Publ., London (1967).

[14] P.J. Heawood
"Map Color Theorem."
Quart. J. Pure Appl. Math., 24 (1890), 332.

[15] W. Kühnel
"Higher-dimensional analogues of Császár's torus."
Results in Mathematics, 9 (1986), 95–106.

[16] M. Las Vergnas
"Convexity in Oriented Matroids."
Journ. Comb. Th. Ser. B, 29 (1980), 231–243.

[17] A.F. Möbius
Gesammelte Werke II.
Hrsg. Felix Klein, Neudruck der Ausgabe von 1886, 1967, p.552 ff.

[18] J. Reay
"Unsolved problems: Can neighborly polyhedra be realized geometrically?"
In "Shaping Space, A Polyhedral Approach" M. Senechal and G. Fleck (eds.), Birkhaüser, Boston-Basel (1988), 251–253.

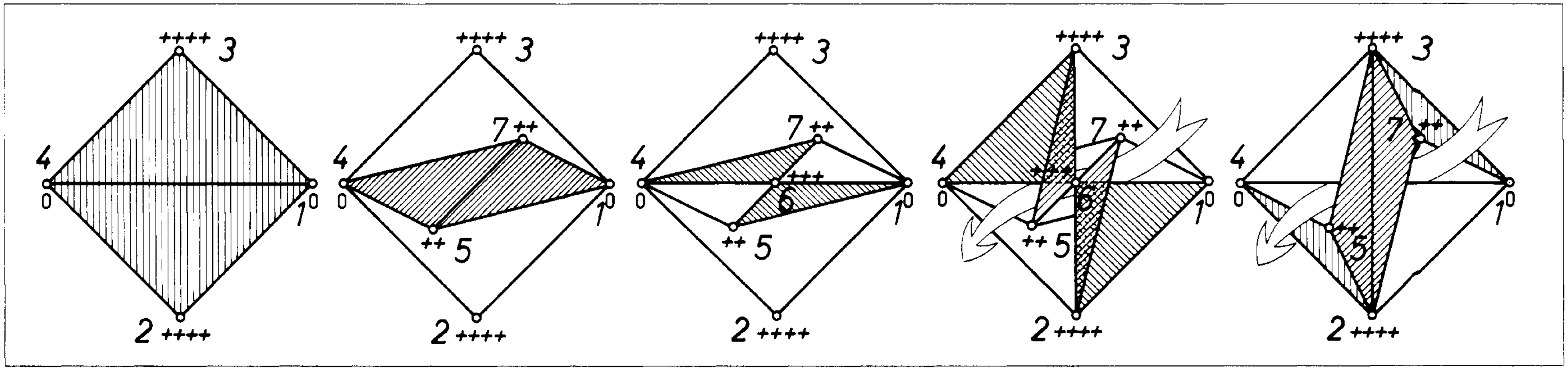
[19] C. Reinhard
"Zu Möbius' Polyedergeometrie."
Berichte der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1885).

[20] K.S. Sarkaria
"On neighborly triangulations."
Trans. Am. Math. Soc., 277, No.1 (1983), 213–239.

[21] G. Ringel
"Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden."
Math. Z., 64 (1956), 103–114.

[22] J. Simutis
"Geometric realizations of toroidal maps."
Ph.D. thesis, Univ. of California, Davis (1977).

FIGURE 5



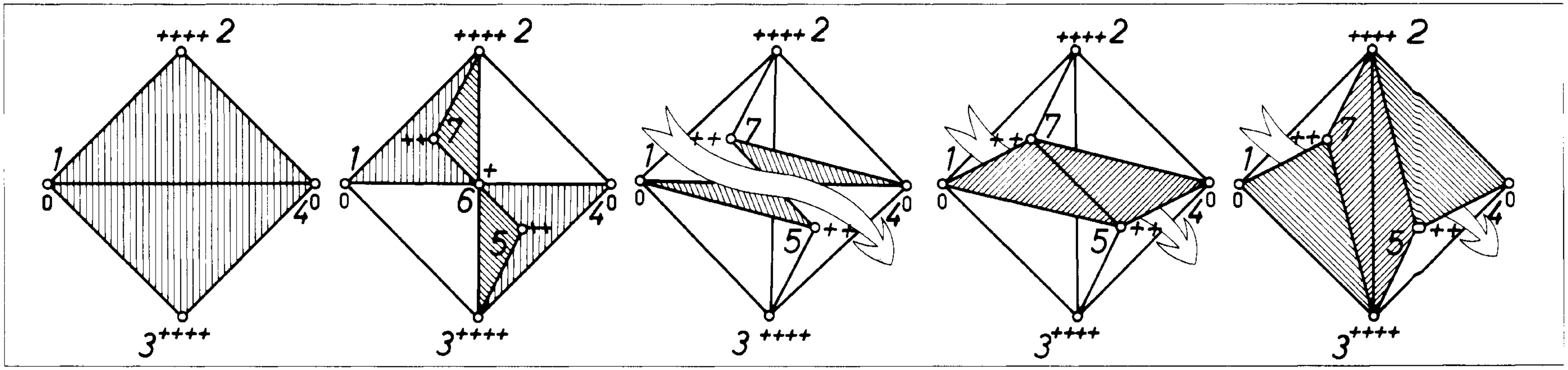


FIGURE 6

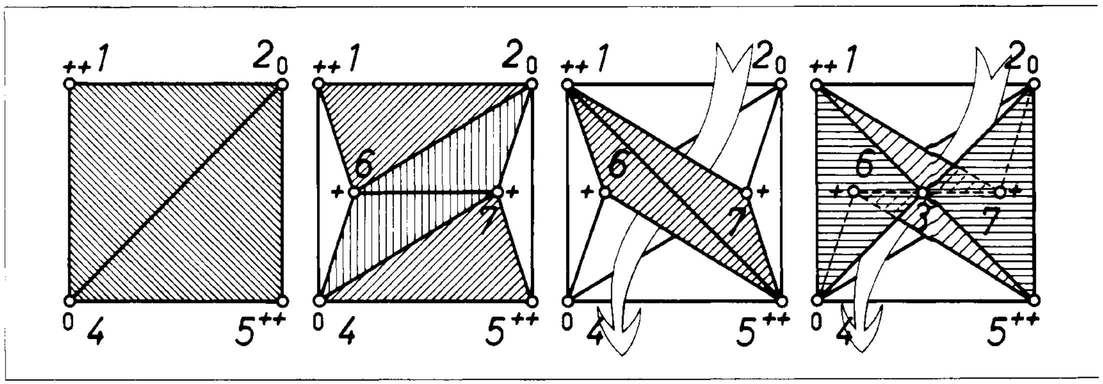


FIGURE 7

APPENDIX / ANNEXE

TABLE 1 / TABLEAU 1

List of all simplicial Möbius matroid manifolds (up to H_{C_M}-equivalence). Signed bases 1234, 1235, 1236, ... 4567.

Liste de toutes les variétés matroïdes simpliciales de Möbius (à une H_{C_M}-équivalence près). Bases signées 1234, 1235, 1236, ... , 4567.

a 1	++++------+++---++++---------+-----
a 2	++++------++++--++++--------++-----
a 3	++++------+++++-++++-------+++-----
a 4	++++------++++++++++------++++-----
a 5	+++-------+++++++++++-----++++-----
a 6	++--------+++++++++++-----++++-----
a 7	+++-------++++++++++------++++-----
a 8	++--------++++++++++------++++-----
a 9	++++------++++++++++-------+++-----
a10	+++-------++++++++++-------+++-----
a11	++--------++++++++++-------+++-----
a12	++++------+++++-++++--------++-----
a13	++++------++++++++++--------++-----
a14	+++-------++++++++++--------++-----
a15	++++------++++--++++---------+-----
a16	++++------+++++-++++---------+-----
a17	++++------++++++++++---------+-----
a18	+++-------++++++++++---------+-----
a19	++++------+++---++++---------------
a20	++++------++++--++++---------------
a21	++++------+++++-++++---------------
a22	++++------++++++++++---------------
a23	+++-------++++++++++---------------
a24	++--------++++++++++--------++-----

b 1	++++---+--+++-++---+------++----++-
b 2	++++---++-+++-++---+------++---+++-
b 3	+++----+--+++-++---++-----++----++-
b 4	++++---++-+++-++---+------++----++-
b 5	++++---+--+++-++---+-----+++---+++-
b 6	++++---+--+++-++---+-----+++----++-
b 7	++++---+--+++-+++--+------++----++-
b 8	++++---++-+++-+++--+------++----++-
b 9	++++---+--+++-++--++-----+++----++-
b10	++++---+--+++-++--++-----+++---+++-
b11	++++---++-+++-++---+-----+++---+++-
b12	++++---++-+++-++---+-----+++----++-
b13	++++---++-+++-++---+-----+++-+-+++-
b14	++++---++-+++-++---+-----+++-+--++-
b15	++++---++-+++-++--++------++----++-
b16	++++---++-+++-++--++------++---+++-
b17	++++---++-+++-++--++-----+++----++-
b18	++++---++-+++-++--++-----+++---+++-
b19	++++---++-+++-++--++-----+++-+--++-
b20	++++---++-+++-++--++-----+++-+-+++-
b21	++++---++-+++-++---++-----++----++-
b22	++++---+--+++-++---++-----++----++-
b23	++++---+--+++-+++--++-----++----++-
b24	++++---++-+++-+++--++-----++----++-
b25	++++---++-+++-+++--+-----+++----++-
b26	++++---++-+++-+++--+-----+++-+--++-
b27	++++---+--+++-+++--+-----+++----++-
b28	++++---++-+++-+++--+-----+++---+++-
b29	++++---++-+++-+++--+-----+++-+-+++-
b30	++++---+--+++-+++--+-----+++---+++-
b31	++++---++-+++-++---++----+++----++-
b32	++++---++-+++-++---++----+++-+--++-
b33	++++---+--+++-++---++----+++----++-
b34	++++---++-+++-+++--++----+++----++-
b35	++++---++-+++-+++--++----+++-+--++-
b36	++++---+--+++-+++--++----+++----++-
b37	++++---++-+++-++--+++-----++----++-
b38	++++---+--+++-++--+++-----++----++-
b39	++++---++-+++-++--+++----+++----++-
b40	++++---++-+++-++--+++----+++-+--++-
b41	++++---+--+++-++--+++----+++----++-
b42	+++----+--+++-+++--++-----++----++-
b43	++++---++-+++-+++--++-+--+++-+--++-
b44	++++---++-+++-++---++-+--+++-+--++-
b45	++++---++-+++-+++--++-+--+++----++-
b46	++++---++-+++-++--+++-+--+++-+--++-
b47	++++---++-+++-++---++-+--+++----++-
b48	++++---+--+++-+++--++-+--+++----++-

TABLE 2 / TABLEAU 2

Symmetries in the symmetric cases (see also Figures 4-7):

Symétries dans les cas symétriques (voir aussi les figures 4-7):

a 1	(6)(14)(23)(57)
a 2	(6)(14)(23)(57)
a 3	(6)(14)(23)(57)
a 4	(6)(14)(23)(57)
a 5	(6)(14)(23)(57)
a24	(2)(13)(47)(56)
b 1	(6)(14)(23)(57)
b 2	(6)(14)(23)(57)
b 3	(6)(14)(23)(57)
b46	(3)(15)(24)(67)
b47	(3)(15)(24)(67)
b48	(3)(15)(24)(67)