

## Spatial representation through relative object space and absolute software space

**I**n the teaching of three-dimensional geometry, there is a dichotomy between two categories of activities: concrete manipulation and observation, and activities that involve abstraction, theorization and concepts. C. Laborde [6] explained this dichotomy, which is at the root of geometry as it is generally taught, in terms of oppositions: intuition vs. deduction, construction vs. demonstration, and spatial vs. numerical considerations. Only activities that involve deduction, demonstration or the numerical are considered as mathematical activities, strictly speaking. This divorces a theoretical knowledge of geometry from the physical space of which such knowledge is a model.

A primary reason for such a dichotomy is that spatial situations are not easily accessible. Such situations are accessed essentially by means of graphic representations, which are generally planar projections that conceal or modify certain characteristics of the configuration represented. There must be a consensus among teacher and students on how graphic representations are to be interpreted. This requires an activ-

## Vers une représentation de l'espace à travers l'espace d'un objet et l'espace d'un logiciel

**D**ans l'enseignement de la géométrie tridimensionnelle, on peut remarquer une rupture entre deux catégories d'activités: des activités concrètes de manipulation et d'observation, et des activités mettant en oeuvre des abstractions, des théorisations et des concepts. C. Laborde [6] a explicité une telle dichotomie, double origine de la géométrie enseignée en général, en termes d'oppositions: intuition-déduction, construction-démonstration et spatial-numérique. Seules les activités relevant de la déduction, de la démonstration ou du numérique sont considérées comme des activités mathématiques à proprement parler. Ceci pose le problème de la rupture de sens entre les connaissances géométriques théoriques et l'espace physique dont elles sont la modélisation.

Une raison primordiale d'une telle rupture est la difficulté d'accès aux situations spatiales. Cet accès se fait essentiellement à travers les représentations graphiques. Ces dernières, souvent des projections sur le plan du tableau, masquent ou modifient des caractéristiques de la configuration représen-

**Iman Osta**  
American University of Beirut  
Education Department  
New York Office  
850, 3<sup>rd</sup> Avenue  
New York, 10022 USA

English translation:  
Traduction anglaise:  
Peter Bottéas

ity of perception (in the sense of Piaget [9]) that enables students to anticipate the configurations that are represented.

The dichotomy between the numerical and the spatial is pushed to its limits in analytical three-dimensional geometry: points are replaced by numbers, and curves by equations. Algebraic relationships are established and applied to the numerical characteristics of the elements of a configuration in order to replace the supposed geometric relationships between those elements. A corollary of modifying the nature of "geometric activity" in this way is the virtual disappearance of graphic figures and representations.

This therefore raises questions on how the role of graphic representations can be restored: How can they be used in a functional way in imparting geometric knowledge? Can symbols be used to restore the severed link between the spatial and the theoretical in the teaching of certain geometric concepts (particularly in establishing and developing the concept of a three-dimensional system of reference)? How can we overcome practical problems that make graphic activities in class difficult and costly?

### Theoretical framework

The presupposition in our research is that the use of the computer as a teaching aid can provide a new approach to solving the problems outlined above. Our studies are grounded in a framework of educational theory, notably in the following areas:

- psychogenetic studies on spatial representation [10] and on the formation and development of graphic representations [4, 5, 12];
- studies on graphic representations in perspective and their interpretation [8], whether in linear perspective [2], cavalier perspective [1], or in a viewing system, particularly as applied to technical training [11];
- educational studies on the formation, construction and development of systems of locating points in space [3].

### Research method and experimental set-up

The problem situation described in this paper is part of a learning process that involves a teaching sequence within a three-dimensional Euclidean system of reference. It is intended for secondary-level students<sup>1</sup> who are already somewhat familiar with locating points in the plane. (The students involved in the study had had a standard lesson on the

tée. Un consensus doit exister entre le maître et les élèves sur le code d'interprétation des représentations, interprétation qui exige, d'ailleurs, une activité perceptive (au sens de Piaget [9]) permettant une appréhension des configurations représentées.

La rupture de sens entre le numérique et le spatial est encore poussée à son extrême dans le cas de la géométrie tridimensionnelle analytique : Les points sont remplacés par des nombres, les courbes par des équations. Des relations algébriques sont définies et utilisées sur les caractéristiques numériques des éléments d'une configuration, pour remplacer des relations géométriques supposées entre ces éléments. En parallèle avec cette modification de la nature de l'activité «géométrique», les figures et représentations graphiques disparaissent, ou presque.

Des questions se posent alors sur les moyens à mettre en oeuvre pour restaurer leur place aux représentations graphiques : comment les utiliser de manière fonctionnelle dans la transmission des connaissances géométriques? Peuvent-elles procurer un intermédiaire symbolique pour restaurer le lien de sens rompu entre le spatial et le théorique, dans l'enseignement de quelques notions géométriques (notamment dans la genèse et l'évolution de la notion de système de référence tridimensionnelle)? Comment surmonter les difficultés pratiques qui rendent difficiles et coûteuses des activités graphiques en classe?

### Cadre théorique

Dans nos travaux, nous supposons que l'utilisation de l'informatique comme outil d'aide à l'enseignement peut permettre une nouvelle approche des problèmes soulevés ci-dessus. Nous nous situons dans le cadre théorique de la didactique, et prenons appui sur :

- des études psychogénétiques concernant la représentation de l'espace [10] et la genèse et le développement des représentations graphiques [4, 5, 12] ;
- des études sur les représentations graphiques en perspective et leur interprétation [8], qu'elles soient en perspective conique [2], en perspective cavalière [1] ou en systèmes de vues, concernant surtout l'enseignement technique [11] ;
- des études didactiques, concernant la genèse, la construction et l'évolution de systèmes de repérage dans l'espace [3].

<sup>1</sup> "Third level," according to the French European system (14 years old).

*Translator's note:* The third level in the French European secondary-school system (referred to as *troisième*) is roughly equivalent to the 10<sup>th</sup> grade in most North American school systems. In the French system, the grades are numbered *backwards*—i.e., the final (graduating) year is referred to as *terminale*, the second-last year is *première* [first], the third-last year is *seconde* [second], the fourth-last year is *troisième* [third], etc.

topic.) The sequence consists of problem situations designed to have the students devise various spatial location systems by means of constructing graphic representations of various objects in different computer environments [7]. The primary objective is to have them draw upon their theoretical knowledge and use it as a model for spatial relationships.

This paper is concerned with a particular aspect of the activity: students' structuring of space within the software being used (hereafter referred to as "software space") in relation to the space of the object to be represented ("object space"). This structuring is an integral part of the students' discovery of the software's three-dimensional reference system, which will be their basic tool for carrying out the task of graphic representation.

The experimental teaching sequence was carried out three times within the framework of a computer workshop in a secondary school in the Grenoble area in France. Each trial took place over a semester and consisted of approximately twelve two-hour sessions.

Each trial involved eight students working in pairs. In situations that involved the use of a computer, each pair was assigned one terminal. The following means of data collection were used: notes taken by observers (one observer per pair), tape recordings of the students' dialogues and teacher's remarks, a series of computer files containing students' drawings produced in close succession, and texts written by students (completed forms, messages, etc.). The analysis of the data was carried out in a clinical manner.

### **Problem situation**

The task consisted in using a computer program (*Mac Space*) to construct a graphic representation of particular objects in cavalier perspective (right-angle tiling patterns and stair patterns). The students were instructed to do the following:

**Tiling (Phase 1)** Using *Mac Space*, construct a right-angle tiling pattern with the following characteristics: base:  $15 \times 13$ ; height: 20.

**Stairs 1 (Phase 2)** Using *Mac Space*, construct a stair pattern consisting of 5 steps, viewed from the front, with the following characteristics: steps:  $10 \times 7$ ; riser height: 5.

**Stairs 2 (Phase 3)** Using *Mac Space*, construct a stair pattern consisting of 5 steps, viewed from the side, with the following characteristics: steps:  $10 \times 7$ ; riser height: 5.

### **Méthode de la recherche et dispositif expérimental**

La situation-problème explicitée dans cette communication fait partie d'un processus d'apprentissage, à travers une séquence d'enseignement du système de référence euclidien tridimensionnel. Elle est destinée à des élèves de collège, de classe de 3<sup>e</sup> (14 ans), ayant quelques connaissances concernant le repérage plan (les élèves concernés avaient reçu un cours classique à ce sujet). La séquence comporte des situations-problèmes, visant à faire construire par les élèves divers systèmes de repérage dans l'espace, à travers la construction de représentations graphiques de différents objets dans différents environnements informatiques [7]. L'objectif principal est de reconstruire le sens de telles connaissances théoriques, comme modélisation de rapports spatiaux.

Dans cette communication, nous nous intéressons à un aspect de l'activité : celui concernant la construction et la structuration par les élèves de l'espace du logiciel utilisé, en relation avec l'espace de l'objet à représenter. Cette structuration est partie intégrante de la construction par les élèves du système de référence tridimensionnel du logiciel, qui sera leur outil essentiel pour réussir la tâche de représentation graphique.

La séquence d'enseignement a été expérimentée trois fois, dans le cadre d'une structure d'atelier informatique, dans un collège de la région de Grenoble. Chaque expérimentation a eu lieu durant un trimestre, sur (plus ou moins) douze séances de deux heures chacune.

Chaque expérimentation s'est déroulée avec huit élèves, travaillant par binômes. Pour les situations impliquant l'utilisation de l'ordinateur, chaque binôme disposait d'un appareil. Les moyens de recueil des informations sont : les notes des observateurs (un observateur par binôme), les enregistrements magnétophoniques (les dialogues des élèves et les propos du maître ont été enregistrés), la suite des fichiers informatiques enregistrés, contenant les dessins produits par les élèves à des moments rapprochés, les productions écrites des élèves : fiches à remplir, messages à formuler, etc. L'analyse des données recueillies a été faite de manière clinique.

### **Situation-problème**

La tâche consiste à construire, à l'aide d'un logiciel (*Mac Space*), la représentation graphique en perspective cavalière d'objets particuliers (pavé droit et surfaces en escalier).

**Pavé (première modalité)** : En se servant de *Mac Space*,

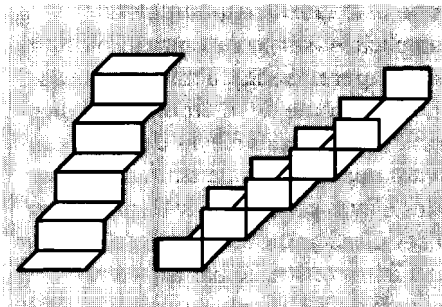


Figure 1

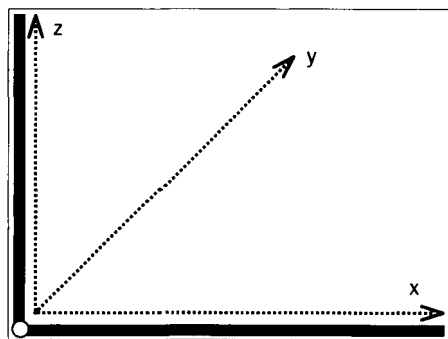


Figure 2

Next, construct a border on each side of the stairs.

For phases 2 and 3, the numerical characteristics of the stair pattern are provided on the blackboard, as well as a corresponding diagram of the stair pattern viewed from the same angle (Figure 1).

The activities outlined above are designed to have students develop a specific representation and structuring of space, according to the specific structure of the objects concerned. The students are placed in situations that require interaction with the software's underlying coordinate system. In order to carry out the activities successfully, the students must discover and reconstruct the system. The students' task can be completed successfully only if the appropriate coordinates are assigned to the parts of the configuration in relation to a point of reference that the students are unaware of a priori.

### Conceptual analysis of the software

*Mac Space* is an interactive graphics editor for the Macintosh. It is designed to produce graphic representations of three-dimensional objects from a top, side or front view. Graphics can be edited in windows of each of the three orthogonal views. A representation in perspective appears progressively in a three-dimensional control window that cannot be accessed by the user.

Throughout the editing process, modifications to any one of the three views of the spatial configuration result in corresponding modifications to the other views, as well as to the drawing in perspective, reflecting the spatial transformations that will have affected the object represented.

#### ■ Analysis of the underlying system of coordinates

Space in the *Mac Space* program relates to an implicit, orthonormal matrix which contains three invisible axes that are perpendicular to one another:  $Ox$ ,  $Oy$ , and  $Oz$ . The Figure 2 illustrates a simulation in the three-dimensional window of the directions and orientations of the reference point's three virtual axes.

The system of coordinates is displayed in the form of an interactive window, which contains the coordinates of the point at which the cursor is currently located. *Mac Space* provides a spatial representation in each of the windows. Each window is assigned a particular direction that is perpendicular to a given plane, which is isomorphic in each of the win-

construire un pavé droit, ayant les caractéristiques suivantes: dimensions de la base: 15 et 13; hauteur: 20.

**Escalier 1 (deuxième modalité)**: En se servant de *Mac Space*, construire un escalier de 5 marches, qu'on voit de face, ayant les caractéristiques suivantes: dimensions de la marche: 10 et 7; hauteur de la contre-marche: 5.

**Escalier 2 (troisième modalité)**: En se servant de *Mac Space*, construire un escalier de 5 marches, qu'on voit de côté, ayant les caractéristiques suivantes: dimensions de la marche: 10 et 7; hauteur de la contre-marche: 5.

En un deuxième temps, construire une bordure de chaque côté de l'escalier.

Pour les deux dernières modalités, les caractéristiques numériques de l'escalier sont données au tableau, de même qu'un croquis représentant l'escalier, selon la position correspondante (figure 1).

Ces tâches visent à faire évoluer une représentation et une structuration particulières de l'espace, induites par la structure particulière des objets. Elles mettent l'élève dans des situations d'interaction avec le système de repérage implicite du logiciel, qu'il aura à détecter et à construire pour pouvoir réussir. La tâche ne peut être réussie qu'en donnant aux éléments de la configuration les coordonnées appropriées par rapport à un repère que les élèves ignorent a priori.

### Analyse conceptuelle du logiciel

*Mac Space* est un éditeur graphique conversationnel qui fonctionne sur Macintosh. Il est destiné aux représentations graphiques d'objets à 3 dimensions à partir de trois vues (de dessus, de face et de côté). Le traitement est possible dans les trois fenêtres des vues orthogonales; la représentation en perspective apparaît au fur et à mesure dans une fenêtre 3D qui est une fenêtre de contrôle interdite d'accès.

Tout au long du traitement, les modifications que subit une des trois vues de la configuration spatiale représentée se traduisent par les modifications correspondantes sur les autres vues et sur le dessin en perspective qui à leur tour traduisent les transformations spatiales ayant affecté l'objet représenté.

#### ■ Analyse du système de coordonnées sous-jacent

L'espace du logiciel est rapporté à un repère orthonormé implicite, formé de trois axes non matérialisés, deux à deux perpendiculaires:  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . La figure 2 est une simulation,

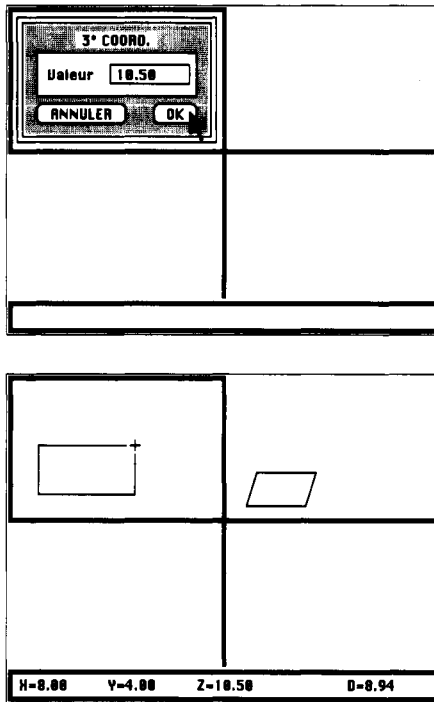


Figure 3

dows in relation to a non-associative product of three one-dimensional spaces:  $(Ox, Oy, Oz)$  for the top view,  $(Ox, Oy, Oz)$  for the side view and  $(Oz, Ox, Oy)$  for the front view.

### ■ Construction of a rectangle with *Mac Space*

The task at hand can be analysed by means of an analysis of the construction of the basic shape: the rectangle. The analysis will take into account only the rectangles that are parallel to the planes of *Mac Space's* trirectangular frame of reference.

*Mac Space* is used to construct a rectangle in the window whose plane is parallel to the primary plane. The user must carry out the following steps (Figure 3):

- If the plane of the rectangle is not the zero plane of the program's trirectangular frame of reference, enter the value of the third coordinate—the coordinate of the plane of the rectangle in relation to the trihedral plane. That reference value will determine what is required for the construction of the rectangle.
- Place the cursor on the point within the window that corresponds to the position of a vertex of the rectangle. The movement of the cursor is accompanied by variations in the absolute coordinates of the current point in the interactive window. Once the desired position has been attained, validate the point.
- The coordinates are then reset to zero. Move the cursor to the opposite vertex. The movement of the cursor is accompanied by variations in the coordinates of the current point in relation to the validated point, which are the dimensions of the current rectangle. Once the desired position has been attained, validate the point.

### A priori analysis

#### ■ The role of perception

One of the primary orientations of this study is to redefine the status and role of perception in learning three-dimensional geometry. The way this teaching sequence is designed, perception takes on two contradictory yet complementary roles: first, as an intuitive control method that the students can use in interpreting and producing graphic representations, and as an obstacle that they must overcome by constructing opposing control methods over geometric relationships that stem from the use of coordinates.

In this problem situation, each particular control method comes into play alternately at different stages:

au sein de la fenêtre 3D, des directions et sens d'orientation des trois axes virtuels de ce repère.

Le système de coordonnées se manifeste dans l'interface par une fenêtre de communication où, lors de la sélection d'un outil graphique, s'affichent les coordonnées du point courant représenté par le curseur. L'espace est représenté par *Mac Space* dans chacune des fenêtres. Il est considéré, dans chacune, comme un ajout d'une direction privilégiée, perpendiculaire à un plan privilégié. Il est isomorphe dans chacune de ces fenêtres à un produit non-associatif de trois espaces unidimensionnels:  $(Ox, Oy, Oz)$  pour la fenêtre de la vue de dessus,  $(Ox, Oy, Oz)$  pour la fenêtre de la vue de côté et  $(Oz, Ox, Oy)$  pour la fenêtre de la vue de face.

### ■ Construction d'un rectangle avec *Mac Space*

Pour pouvoir analyser la tâche proposée, analysons la construction de l'objet fondamental: la facette rectangulaire. Cette analyse ne prendra en compte que les facettes rectangulaires parallèles aux plans du repère trirectangle de *Mac Space*.

Un rectangle est construit avec *Mac Space* dans la fenêtre dont le plan directeur est parallèle à son plan, en suivant les étapes suivantes (figure 3):

- Si le plan du rectangle n'est pas le plan zéro du repère trirectangle du logiciel, communiquer à l'ordinateur la valeur de la «3<sup>e</sup> coord.», coordonnée du plan du rectangle par rapport au plan du trièdre; cette valeur-repère détermine le niveau de traitement adéquat pour la construction de la facette;
- amener le curseur jusqu'au point de la fenêtre, correspondant à la position d'un sommet de la facette. Le mouvement du curseur est accompagné des variations des coordonnées absolues du point courant, dans la fenêtre de communication. Une fois la position voulue atteinte, valider le point;
- les coordonnées sont alors mises à zéro. Amener le curseur à la position du sommet opposé de la facette. Le mouvement du curseur est accompagné des variations des coordonnées relatives du point courant, par rapport au point validé, qui sont les dimensions du rectangle courant. Une fois la position voulue atteinte, valider le point.

### Analyse a priori

#### ■ Enjeu de la perception

Une des orientations principales de cette recherche est de redéfinir le statut et le rôle de la perception dans l'apprentissage de connaissances en géométrie tridimensionnelle. Dans

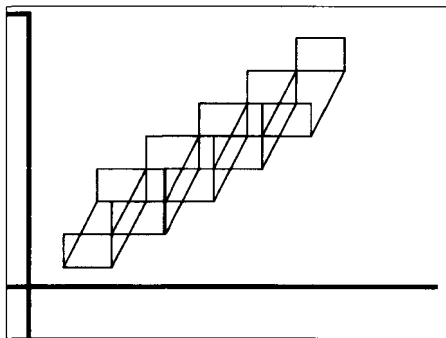


Figure 4

i) For the representation of a tiling pattern and the front view of a stair pattern, perception is the primary means of control. Through the course of the activities, the students will have to discover the proper means of coordinating and connecting the successive shapes that they construct. The position of a shape in relation to others is validated by means of perception. The regularity and familiarity of the objects to be constructed and their representations from different angles confirm perception as a reliable control method for discovering and constructing a referential system for the software by means of the graphic results.

ii) For the side view of the stair pattern with a border, perception is "devalued" as a means of control. The representation of the stair pattern in its new position leads to confusion of the representations of the various component shapes. (It should be pointed out that the program does not mask hidden edges.) As the shapes are being constructed, perception loses ground as an effective control method.

Thus, as the construction process progresses and perception becomes clouded, students can control their constructions only through increased knowledge of how the software's referential system works, as well as through a more complex structuring of space (Figure 4).

#### ■ Object space vs. absolute space

This situation is intended to demonstrate a distinction and opposition between the relative space of the object and the absolute space of the software, viewed from a particular angle. It is during phase 3 (side view of stair pattern) that the distinction becomes apparent: the front view no longer represents the projection of the front of the stairs. The front of the stairs must be constructed in the side-view window and the side of the stairs in the front-view window. One of the objectives of this situation is to lead to a distinction between the space of the object (i.e., the stairs) and the absolute space of the software, which is dissociated from the object and linked to fixed points of reference.

#### Results

The following analysis is concerned with the development of students' mental structuring of space as represented by the software, and its relationship with the space of the object to be drawn (i.e., real micro-space). We shall adopt the hypothesis that the development of the mental structuring of space

la construction de cette séquence d'enseignement, la perception acquiert deux rôles contradictoires et complémentaires : d'abord comme un moyen de contrôle intuitif dont disposent les élèves pour l'interprétation et la production des représentations graphiques, puis comme un obstacle qu'ils doivent dépasser, en construisant contre lui d'autres moyens de contrôle sur des relations géométriques, relevant du repérage.

Dans cette situation-problème, des moyens de contrôle particuliers sont favorisés alternativement, à des moments différents :

i) Pour la représentation du pavé et de l'escalier vu de face, la perception est le moyen de contrôle privilégié. En effet, au cours de ces activités, les élèves auront à découvrir le moyen pour assurer la coordination et la connexion des facettes successivement construites. La validation de la position d'une facette par rapport aux autres se fera perceptivement. La régularité et la familiarité des objets à construire et de leurs vues consolideront la perception comme un moyen de contrôle sûr, sur lequel on peut s'appuyer pour avancer la découverte et la construction du système de référence du logiciel, à travers le résultat graphique.

ii) Pour la représentation de l'escalier avec bordure, vu de côté, le contrôle perceptif est « dévalué ». La représentation de l'escalier dans sa nouvelle position mène à des enchevêtrements entre les représentants des différentes facettes composantes (rappelons que le logiciel utilisé n'efface pas les arêtes cachées). Au fur et à mesure que la construction des facettes composantes avance, la perception sera défavorisée comme moyen de contrôle.

Ainsi, au fur et à mesure que la construction avance en brouillant la perception, les élèves ne pourront contrôler leur construction que par une connaissance de plus en plus accrue du fonctionnement du système de référence régissant le logiciel, et par une structuration de plus en plus élaborée de son espace (figure 4).

#### ■ Espace de l'objet et espace absolu

Cette situation vise à distinguer, en les opposant, l'espace relatif de l'objet et l'espace absolu du logiciel, observé selon une direction déterminée. C'est au cours de la troisième modalité (Escalier vu de côté) que la distinction sera imposée : la vue de face ne représente plus la projection de la face de l'escalier ; la face de l'escalier doit être construite dans la fenêtre de la vue de côté, son côté dans la fenêtre de la vue de

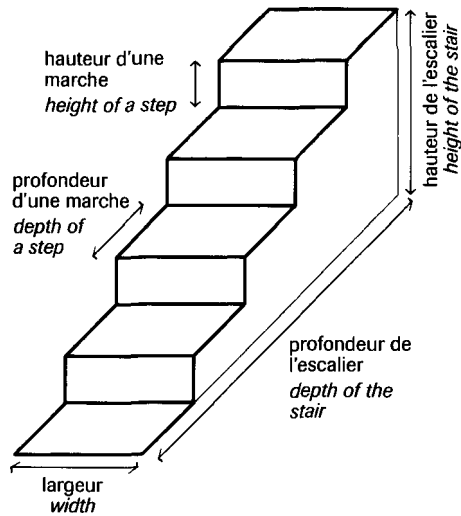


Figure 5

is not independent of how the software functions and, in particular, of its referential system.

The results have been organized into two main parts: the first comprises a study of the various spaces constructed and used by the students as referential frameworks; the second consists of an analysis of the key processes that lead to a structuring of space within the software with respect to that of the objects concerned.

### Types of space constructed by students

The students referred to different types of space. In order to identify them, we have used an element that has proven important in the process: language. We have used the nomenclature used by the students in the course of their discussions to designate the dimensions of the object according to the primary axes. Interaction between students fostered their development in the construction of different types of space. In order for a pair of students to communicate, both needed to agree on the words they would use to designate the primary dimensions of the object: length, width, height, depth, etc.

#### ■ A. The object in three-dimensional space

In three-dimensional space, the dimension of the frontal horizontal axis is the *width*, that of the normal horizontal axis is *depth*, and that of the vertical axis is *height*. These designations are reminiscent of the terminology of solids, and imply that the object is, to a degree, integral (Figure 5).

Consider the following dialogue between partners, which took place while they were constructing their first rectangle in the top-view window. The rectangle is supposed to represent the first step.

E: *5, that's the height... 7 deep, and 10, that's the width. Take 10... 10 here and 5 there.*

S: *Isn't it 7?*

E: *Is it 7 or 5?*

S: *It's 7, isn't it? There's a step there...*

At the beginning of the dialogue, the first student ("E") used terms that refer to the three-dimensional space of the object. The terms used create links between words, measurements and axes.

5 → "height" → vertical axis

7 → "depth" → normal horizontal axis

10 → "width" → frontal horizontal axis.

face. Un des objectifs de la situation est de faire évoluer une telle distinction pour qu'elle aboutisse à une distinction entre l'espace de l'escalier et l'espace du logiciel, entre espace relatif et espace absolu, détaché de l'objet et rapporté à un repère fixe.

### Résultats

Dans l'analyse suivante, nous nous intéressons à l'évolution des processus de structuration mentale, chez les élèves, de l'espace représenté par le logiciel, et de sa relation avec l'espace de l'objet à dessiner (micro-espace réel). Nous adoptons l'hypothèse que l'évolution d'une telle structuration n'est pas indépendante de la construction du mode de fonctionnement du logiciel et, en particulier, de son système de référence.

Nous avons organisé ces résultats dans deux parties principales: la première comporte une étude des différents espaces construits et utilisés par les élèves comme cadres de référence, la deuxième comporte une analyse des processus clés aboutissant à la structuration de l'espace du logiciel en fonction de ceux des objets.

### Espaces construits par les élèves

Nous avons repéré différents espaces auxquels les élèves font référence. Pour identifier ces espaces, nous nous sommes appuyés sur un aspect qui s'est avéré important dans l'évolution de la construction de ces espaces: le langage, à travers les nominations utilisées par les élèves, au cours de leurs discussions, pour désigner les dimensions de l'objet selon les directions principales. L'interaction entre les élèves a favorisé l'évolution de la construction des différents espaces: pour pouvoir se comprendre entre eux, les deux élèves d'un même binôme doivent se mettre d'accord sur une utilisation des mots désignant les dimensions principales de l'objet: longueur, largeur, hauteur, profondeur...

#### ■ A. Espace tridimensionnel de l'objet

Dans un tel espace, la dimension selon l'horizontale frontale est «la largeur», celle selon la normale est «la profondeur» et celle selon la verticale est «la hauteur». Ces désignations évoquent celles des solides, et infèrent à l'objet une certaine intégrité (figure 5).

Considérons le dialogue suivant, au sein d'un binôme, lors de la construction du premier rectangle, dans la fenêtre de la

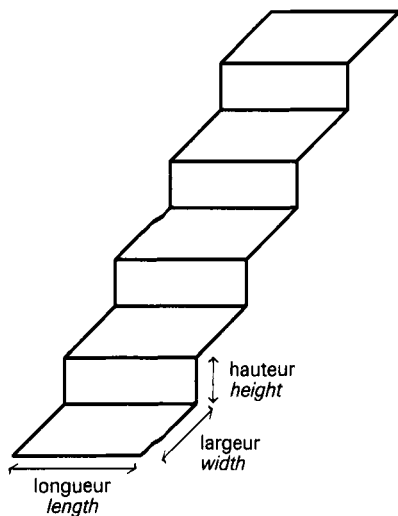


Figure 6

Such relationships, constructed in absolute three-dimensional space, can cause problems when applied to relative space, as in the windows. That is precisely what is revealed in the previous dialogue: in the space in the top-view window, the step is represented by a rectangle (10 × 7) with a horizontal side and a vertical side. That is what led the first student to suggest the measurement 5 for the vertical side, according to the following reasoning:

vertical → "height" → 5

### ■ B. Space of the object's components

Three-dimensional space is conceived of as the juxtaposition of the space of the object's components according to the various primary axes. The right-angle tiling pattern is conceived of as a set of rectangular surfaces, and the stair pattern has a set of steps and risers. The dimensions of a step are described in terms of "length" and "width," in reference to the horizontal plane, and those of a riser in terms of "length" and "height," in reference to the vertical frontal plane.

Those designations are suggested by the terms traditionally used in describing solids: "length," "width" (of the base), and "height." Such designations are linked to a concept of space that favours the horizontal plane and the linear vertical direction (see **Figure 6**).

In the following dialogue, which took place at beginning of the students' activities, students "M" and "O" used opposing terms. Those used by latter refer to the object's three-dimensional space. The two students began the construction activity in the front-view window.

O: *I'm putting it there. What's x and z, and all that?*

M: *They're the dimensions.*

O: *Yeah, but which one's the height? Wait a minute—that's the width.* [Horizontal axis in the front-view window.]

M: *No, that's... the length. You've got the length, the width...*

O: *This is the width and that's the height?* [Horizontal and vertical axes in the front-view window.]

M: *No, that's... the length, and that... the length, that's the longest part.*

### ■ C. Software space

It is primarily in the third phase (side view of the stair pattern) that "software space" is differentiated from "object space." In the first two phases, the terms used for the dimen-

vue de dessus. Un tel rectangle est supposé représenter la première marche.

E: *5, la hauteur... 7 en profondeur, et 10, ce sera en largeur... prends 10... 10 là et 5 là.*

S: *5 ? C'est pas 7 ?*

E: *On a 7 ou 5 ?*

S: *7... non ? C'est une marche, là...*

Au début de ce passage, le premier élève (E.) utilise des désignations se référant à l'espace tridimensionnel de l'objet. Ces désignations instaurent des liens entre : les mots, les mesures et les directions :

5 → « hauteur » → verticale

7 → « profondeur » → horizontale normale

10 → « largeur » → horizontale frontale.

Ces liens, construits dans l'espace tridimensionnel absolu, peuvent poser des problèmes lors de leur utilisation dans des espaces relatifs tels que ceux des fenêtres. C'est, en effet, ce qui est révélé dans le dialogue précédent : dans l'espace de la fenêtre de la vue de dessus, la marche est représentée par un rectangle (10,7) ayant un côté horizontal et un côté vertical. C'est ce fait qui a amené (E.) à proposer la mesure 5 pour le côté vertical, selon le lien :

verticale → « hauteur » → 5

### ■ B. Espaces des composants de l'objet

L'espace tridimensionnel est conçu comme étant la juxtaposition de ceux des composants selon différentes directions principales. Le pavé droit est conçu comme un ensemble de faces rectangulaires, l'escalier est conçu comme un ensemble de marches et de contremarches. Les dimensions d'une marche sont désignées par « longueur » et « largeur » en référence à la direction plane horizontale, celles d'une contremarche par « longueur » et « hauteur », en référence à une direction plane verticale frontale.

Nous pensons que de telles désignations sont inférées par les désignations utilisées classiquement dans l'enseignement, lorsqu'il s'agit de solides : « longueur », « largeur » (de la base) et « hauteur ». De telles désignations sont liées à une conception de l'espace privilégiant le plan horizontal et la direction linéaire verticale (voir **figure 6**).

Dans le dialogue suivant, au début de leurs activités, les désignations utilisées par (M.) s'opposent à celles utilisées par (O.). Ces dernières font référence à l'espace tridimen-



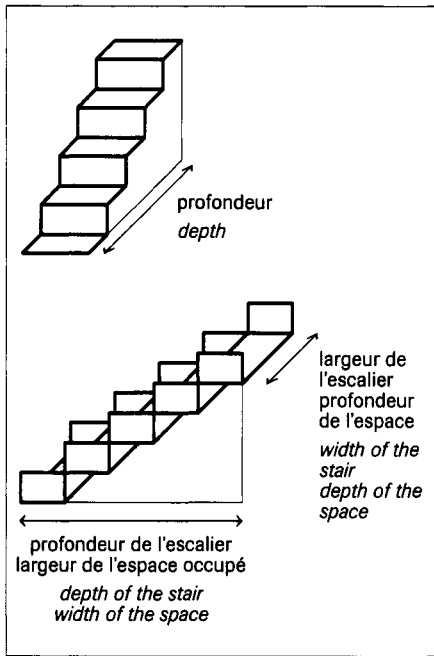


Figure 7

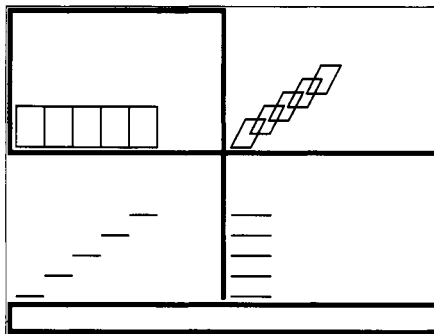


Figure 8

sions of the object coincide with those for absolute space: the "depth" of the object is measured in terms of "depth" as the primary plane in absolute space. However, in phase 3 (Stairs 2), the designations diverge: it is the "width" of the stairs that is measured in terms of depth as the primary plane in absolute space (Figure 7).

The following dialogue is typical in phase 3 (side view of the stair pattern). The two students had finished constructing the steps (Figure 8) and selected the side-view window in order to begin constructing the risers. One of them referred to the relative space of the configuration represented, while the other referred to the absolute space of the software.

- S: *Let's say that this is the front view... because the side view is the front view now. So, the front view [= the front of the object]... the level we're going to choose is the depth [of the step], so what we have to do is choose the level—we have to choose the depth, so, in this view [he points to top view; he wants to find the value of the width of a step]...*
- O: *Yeah, well... the depth is zero!* [Confusion between the depth and the height of the starting point of the riser.]
- S: *No, the depth isn't the depth anymore—it's the width now...*

### Key processes in the construction of space within the software

#### 1. Structuring space in the active window

Using their initial knowledge of two-dimensional coordinates, the students quickly established a correspondence between the movement of the cursor and the variations in the values of the two variable coordinates. They structured the space within the window according to the numerical information displayed, by means of establishing specific correlations:

- correlation: (two coordinates) → (two primary one-dimensional axes)—e.g., a correspondence is established in the top-view window, between the ordered pair  $x$  and  $y$ , and between the horizontal and vertical axes.
- correlation: (direction of cursor movement) → (direction of variation of coordinate values)—e.g., when the cursor moves to the right in the top-view window, the value of  $x$  increases.

sionnel de l'objet. (O.) et (M.) ont commencé leur construction dans la fenêtre de la vue de face.

- O: *Je mets là... c'est quoi déjà  $x$  et  $z$ ... tout ça ?*
- M: *C'est les dimensions.*
- O: *Oui, mais c'est laquelle, la hauteur ?... Attends; ça, c'est la largeur... [direction horizontale de la fenêtre de la vue de face]*
- M: *Non, ça, c'est... la longueur... t'as la longueur, la largeur, (...)*
- O: *Ça, c'est la largeur, et ça, la hauteur ? [horizontale et verticale de la fenêtre de la vue de face]*
- M: *Non... ça, c'est la... longueur, et ça... (...)... la longueur, c'est ce qu'il y a de plus long, quoi.*

### ■ C. Espace du logiciel

C'est surtout pendant la troisième phase (escalier vu de côté) que cet espace s'est distingué de l'espace de l'objet. En effet, au cours des deux premières phases, les nominations des dimensions de l'objet s'accordent avec celles de l'espace absolu: la «profondeur» de l'objet est mesurée selon «la profondeur» comme direction principale de l'espace absolu. Par contre, dans «Escalier 2», ces nominations divergent: c'est la «largeur» de l'escalier qui est mesurée selon «la profondeur» comme direction principale de l'espace absolu (figure 7).

Le dialogue suivant est typique de la phase de construction de l'escalier vu de côté.

Les deux élèves ont fini la construction des marches (figure 8), puis ils ont sélectionné la fenêtre de la vue de côté pour commencer la construction des contremarches. L'un d'eux fait référence à l'espace relatif de la configuration représentée et l'autre à l'espace absolu du logiciel.

- S: *Disons, on est à la vue de face... parce que la vue de côté, maintenant, c'est la vue de face... alors... la vue de face [= la face de l'objet]... le niveau qu'on va choisir, c'est la profondeur [de la marche], donc, ce qu'il faut, c'est choisir le niveau... c'est la profondeur qu'il faut choisir, donc, sur la vue d'ici. [Il montre la vue de dessus... il veut y chercher la valeur de la largeur d'une marche.]*
- O: *La profondeur, ben, alors, c'est zéro!* [Confusion: profondeur pour hauteur du point de départ de la contremarche.]
- S: *Non, la profondeur c'est pas la profondeur; maintenant c'est la largeur... hum ?*

- correlation: (values  $[0, 0]$ ) → (initial position of the plane being modified)

R: *x... What could that be?*

D: *That's it [points to the horizontal axis in the top-view window].*

R: *You think so?*

D: *Yeah, because... well, look: this [he points to the horizontal side] is bigger than that [he points to the vertical side]. And look:  $x$  17.50 and 10.80—look.*

R: *Oh, that makes sense.*

The attempt to find correspondences even helped deepen what the students had learned in math class about the classical structure of a two-dimensional point of reference. In contrast to the static significance often given to coordinates (algebraic measurements of projections), these activities gave them a dynamic significance, linking them to the movement of the cursor, which represented a movable point in the plane, in which variations in coordinates could be observed.

O: *What's  $x$ ? Is it the width... or what?*

S: *Well, it depends—wait a second, you just have to see which one's larger.*

O: *I'll move to the right, and you tell me which one moves the furthest.*

There is also the case in which negative coordinate values are displayed:

O: *Hem... why's it negative?*

S: *Because you're moving downwards. But that doesn't matter—you need to have  $-20$  there.*

## 2. Correspondence

(two axes for the object → two axes for the active window)

The above correspondence creates a link between the space of the object and that of the active window. In order to establish that correspondence, the students drew upon their experience in projective geometry and, particularly, upon the introductory training in drafting that is part of their academic program. Thus, this type of correspondence is discussed when, for instance, the students decide that the horizontal axis in the top-view window corresponds to the object's frontal horizontal axis, and the vertical axis in the same window corresponds to the object's normal horizontal axis.

An interesting stage in this activity that involves this process is the transition from phase 2 (Stairs 1) to phase 3 (Stairs 2).

## Processus-clés de la construction de l'espace du logiciel

### 1. Structuration de l'espace de la fenêtre de traitement

Ayant recours à leurs connaissances initiales concernant le repère bidimensionnel, les élèves ont vite construit une correspondance entre les déplacements du curseur et les variations des valeurs des deux coordonnées variables. Ils ont structuré l'espace de la fenêtre en fonction des informations numériques affichées, à travers la construction de correspondances particulières:

- correspondance (deux coordonnées) → (deux directions unidimensionnelles principales). Ainsi, par exemple, une correspondance est construite, au sein de la fenêtre de la vue de dessus, entre le couple ordonné  $(x,y)$  et le couple ordonné (direction horizontale, direction verticale).

- correspondance (sens de déplacement du curseur) → (sens de variation des valeurs des coordonnées): par exemple, lorsque le curseur se dirige vers la droite dans la fenêtre de la vue de dessus, la valeur de  $x$  devient plus grande.

- correspondance (valeurs  $(0,0)$ ) → (position de l'origine du plan de traitement).

R:  *$x$ , qu'est-ce que ça peut être,  $x$ ?*

D:  *$x$ , c'est ça. [Il indique la direction horizontale de la fenêtre de la vue de dessus.]*

R: *Tu crois ?*

D: *Oui, parce que... regarde, ça. [Il indique du doigt le côté horizontal.] C'est t'y plus grand que ça? [Il indique du doigt le côté vertical.] Et regarde;  $x$  17.50 et 10.80; regarde.*

R: *Ah... logique, oui...*

Cette recherche des correspondances a même avancé les connaissances des élèves, acquises au cours de mathématique, à propos de la structure classique du repère bidimensionnel: par opposition à la signification statique accordée souvent aux coordonnées (mesures algébriques de projections), elle leur a accordé une signification dynamique, liée au mouvement du curseur, représentant un point mobile du plan, dont on observe les variations des coordonnées.

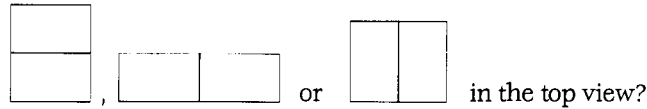
O:  *$x$ , c'est quoi? C'est la largeur? C'est quoi?*

S: *Ben, ça dépend... attends, il y a qu'à regarder quel est le plus grand...*

O: *Je bouge à droite, tu me dis lequel se déplace le plus.*

C'est aussi le cas où des valeurs négatives des coordonnées

It is at that point that a distinction is first made between object space and software space. For example:



In their first attempts to construct a side view of the stair pattern, the students had two obstacles to deal with:

- i) a reflex developed during the preceding activity ("Stairs 1") that has to do with the orientation of the rectangle in each of the windows;
- ii) the equating of the face of an object and its corresponding view, which is none other than the projection of the object in a plane that is parallel to the face in question (a frequent occurrence among drafting students).

It is those obstacles that resulted in constructions in which the stair pattern was not oriented correctly. The erroneous results in the graphics incited the students to resist their reflexes and distinguish between two different representations: object space and software space.

### 3. Correspondence (two primary dimensions of the object → two coordinate values displayed)

In a transitional stage, the preceding correspondence led to the establishment of another, between the measurements of the object and the coordinate values. For example, in the front-view window and for the construction of the tiling pattern, this correspondence consisted of deciding that once the first vertex was validated, the value of  $x$  had to correspond to the width of the tiling pattern (13), and the value of  $z$  had to correspond to its height (20).

O: *What are we supposed to draw in this window? Length, width, or both?*

S: *Height and... width—well, that depends on what you call height.*

O: *OK, height and width... you've got to... it's the width—yeah,  $x$  is the width and  $z$  is the height.*

S: *Yeah— $x$  is 13 and the height is 20.*

### 4. Correspondence (three primary dimensions of the object → three relative coordinates)

This correspondence can signify an extension of students' knowledge of locating points in a plane. Since this process cannot yet imply the structuring of a three-dimensional sys-

(relatives) ont été affichées:

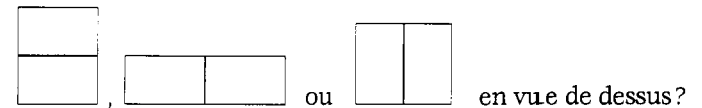
O: *Eh... pourquoi c'est négatif?*

S: *Parce que tu descends... mais ça, c'est pas grave... il faut que tu aies -20 là...*

### 2. Correspondance (deux directions de l'objet → deux directions de la fenêtre de traitement)

Cette correspondance instaure un lien entre l'espace de l'objet et l'espace de la fenêtre courante. Pour construire une telle correspondance, les élèves ont eu recours à leur expérience en géométrie projective, et particulièrement en dessin technique, dont des éléments préliminaires font partie de leur programme scolaire. Ainsi, nous parlons de telles correspondances quand les élèves décident, par exemple, que la direction horizontale au sein de la fenêtre de la vue de dessus correspond à la direction horizontale frontale de l'objet; et que la direction verticale au sein de la même fenêtre correspond à la direction horizontale normale de l'objet.

Un moment intéressant de l'activité, concernant ce processus, est le moment de passage de la modalité «Escalier 1» à la modalité «Escalier 2». C'est là que se distinguent pour la première fois l'espace de l'objet et l'espace du logiciel. Exemple:



Au cours des premiers essais de construction de l'escalier vu de côté, les élèves ont eu à surmonter deux obstacles:

i) Un automatisme qui s'est installé au cours de l'activité précédente (Escalier 1), concernant l'orientation des facettes dans chacune des fenêtres de traitement.

ii) L'identification, fréquente chez les débutants en dessin technique, entre «une face» d'un objet et la vue correspondante, qui n'est autre que la projection de l'objet sur un plan parallèle à la face en question.

Ce sont ces deux obstacles qui ont donné lieu à des constructions où l'escalier est mal orienté. Les résultats graphiques erronés ont incité les élèves à rompre les automatismes, et à séparer deux représentations différentes: celle de l'espace de l'objet et celle de l'espace du logiciel.

### 3. Correspondance (2 dimensions principales de l'objet → 2 valeurs des coordonnées affichées)

Par transition, les correspondances précédentes ont abouti à

tem of reference without a system of spatial coordinates, it is based on the construction of points of reference in the plane on various two-dimensional axes—i.e., the primary axes in space. At this stage, the students were able to conceive of and work with pairs of coordinates in different two-dimensional frameworks, regardless of the direction of the plane of reference and the names of the coordinates. Thus, in the side-view window, for example,  $y$  and  $z$  play the same role as  $x$  and  $y$  in the top-view window.

This extension of knowledge, which led to the structuring of the space in the three windows and to the bipolar correspondence between the coordinates and the object's primary axes, resulted in the establishment of a tripolar correspondence in the two spaces (object space and software space) between the coordinates on the one hand on the primary axes on the other.

Thus: • coordinate  $x$  corresponds to the frontal horizontal axis; • coordinate  $y$  corresponds to the normal horizontal axis, and • coordinate  $z$  corresponds to the vertical axis.

E: *OK, the side view—no, the top view... wait a minute...*

R: *10, 7, 5... Where do you want to do it?*

E: *There... 10 and 7...  $x$  is 10 and  $y$  is 7.*

Thus, we were able to observe a relationship that was established between the dimensions of the stair pattern in a certain order (10, 7, 5), and the values of the coordinates in a specific order as well ( $x, y, z$ ). Once again, for this process, the reflex developed in the "Stairs 1" activity resulted in erroneous graphic results in "Stairs 2."

Consider the following example. The activity was carried out in the side-view window, in which the students wanted to construct the first riser in the stair pattern viewed from the side. They had established the following correlations:  $x=10$ ,  $y=7$ , and  $z=5$ . In the active window, they used the default coordinate zero to decide that the values of the two others were to be assigned to the dimensions of the face being constructed. Thus, in the side-view window,  $x=0$ ; therefore, the two pertinent numerical values in that window were 7 and 5. Of course, they produced a false graphic result (the required values are 10 and 5).

Through this process, the students must let go of the reflex that facilitated their work in the previous activity, yet posed an obstacle in the current activity. In order to do so, the students must apply rational knowledge, based on their

une autre, qui a fait correspondre aux mesures de l'objet des valeurs des coordonnées. Par exemple, dans la fenêtre de la vue de face, et pour la construction du pavé, cette correspondance consiste à décider qu'à partir de la validation du premier sommet, la valeur de  $x$  doit correspondre à la largeur du pavé (13), et celle de  $z$  doit correspondre à sa hauteur (20).

O: *Qu'est-ce qu'on dessine sur cette vue? ... longueur, largeur, tout ça?*

S: *La... la hauteur et la... la largeur... enfin, ça dépend, ce qu'on appelle la largeur.*

O: *Oui, la hauteur et la largeur, il faut faire... donc, il faut que... ça c'est la largeur... oui,  $x$  c'est la largeur, et  $z$  c'est la hauteur.*

S: *Oui...  $x$  13 et hauteur 20...*

#### 4. Correspondance (3 dimensions principales de l'objet → 3 coordonnées relatives)

Cette correspondance peut signifier une extension des connaissances à propos du repérage plan. Ne pouvant pas encore signifier une construction d'un repérage tridimensionnel, à défaut d'une coordination spatiale, ce processus est basé sur une construction de repérages plans dans des directions bidimensionnelles différentes (les directions principales de l'espace). À ce stade, les élèves ont pu concevoir et manipuler des couples de coordonnées dans différents repères bidimensionnels, abstraction faite de la direction du plan du repère et des noms des coordonnées. Ainsi, par exemple,  $y$  et  $z$  jouent, dans la fenêtre de la vue de côté, le même rôle que jouent  $x$  et  $y$  dans celle de la vue de dessus.

Cette extension amenant à la structuration des espaces des trois fenêtres, et aux correspondances bipolaires entre les coordonnées et les directions principales de l'objet, a abouti à une correspondance tripolaire, construite dans les deux espaces (espace de l'objet et espace du logiciel), entre les coordonnées d'une part, et les directions principales de l'objet d'autre part.

Ainsi: • la coordonnée  $x$  correspond à la direction horizontale frontale; • la coordonnée  $y$  correspond à la direction horizontale normale; • la coordonnée  $z$  correspond à la direction verticale.

E: *Bon... vue de côté... non, vue de dessus... attends...*

R: *10, 7, 5... Tu veux le faire où?*

E: *Voilà... de... 10 et 7...  $x$  10,  $y$  7...*

discovery of the software's referential system, which is fully independent of the object.

##### 5. Coordination of the space in the three windows and discovery of software space

This step is considered as the most advanced in the process of mentally constructing software space. It consists in going beyond the level of composition through the juxtaposition of the planes being worked with in the windows in order to end up with the coordination of space as represented by each window, with a view to constructing a mental representation of the three-dimensional software space. A mental activity of this sort involves knowledge of a three-dimensional system of reference and the furthering of such knowledge.

The problems raised within this framework stem from the types of problems studied in drafting. They concern the coordination of the views of an object in order to construct a mental representation of the object. There is a subtle yet fundamental distinction between the logic involved in drafting and that of our activities, which stems from a difference in objectives: in our activities, the object is known (either in its actual form or through a drawing, or it is simply familiar to the students). The objective is to use the space of the object as a model for constructing a representation of the software space. The latter is governed by a three-dimensional referential system that is the result of the coordination of two-dimensional reference points. In turn, by means of correlations (coordinates  $\rightarrow$  primary dimensions), it serves to construct a representation of a system of reference that could organize object space.

The structure of a three-dimensional system of reference established by the students was fostered by that of the software's system of reference. That structure is based on a stratification of space by three categories of parallel planes in each of the primary axes in space.

In order to better understand this structure, let us examine the means of representing a system of projections of a point in space. Locating point *A* in space essentially equates to projecting it along one of the axes of a trihedron. Locating point *A* therefore requires two pieces of information: its coordinate on that axis, and its coordinates within a two-dimensional framework, which can be obtained by projecting the reference plane of the trihedron, which is orthogonal in relation to the axis, into a parallel plane, going through point *A* on the axis.

Ainsi, nous avons pu repérer une relation qui s'était instaurée entre les dimensions de l'escalier dans un certain ordre (10, 7, 5) et les valeurs des coordonnées dans un ordre précis: (*x*, *y*, *z*). Pour ce processus aussi, l'automatisme construit au cours de l'activité « Escalier 1 » s'est heurté aux résultats graphiques erronés de cet automatisme, au cours de « Escalier 2 ». Considérons l'exemple suivant :

L'activité se déroule au sein de la fenêtre de la vue de côté, les élèves veulent construire la première contremarche de l'escalier vu de côté. Ils avaient construit les correspondances:  $x = 10$ ,  $y = 7$ ,  $z = 5$ . Dans la fenêtre de traitement, ils se basent sur la coordonnée par défaut nulle pour décider que les valeurs des deux autres sont celles à affecter aux dimensions de la facette en cours de construction. Ainsi, dans la fenêtre de la vue de côté,  $x = 0$ ; donc, les deux valeurs numériques pertinentes au sein de cette fenêtre sont 7 et 5. Ils obtiennent, bien sûr, un résultat graphique faux (il faut 10 et 5).

C'est à travers cette confrontation que les élèves doivent surmonter un tel automatisme qui fonctionnait comme facilitateur au cours de l'activité précédente, et qui fonctionne comme obstacle au cours de l'activité courante. Pour ce faire, les élèves doivent recourir à des connaissances rationnelles, basées sur leur construction du système de référence du logiciel, détaché et indépendant de l'objet.

##### 5. Coordination des trois espaces des fenêtres et construction de l'espace du logiciel

Cette étape est considérée comme la plus avancée parmi les processus de construction mentale de l'espace du logiciel. Elle consiste à dépasser le niveau de la composition par juxtaposition des plans de traitement au sein des fenêtres, pour aboutir à une coordination des espaces représentés par ces fenêtres, en vue de la construction d'une représentation mentale de l'espace tridimensionnel du logiciel; une telle activité mentale s'est déroulée en interaction avec les connaissances et leur évolution, à propos du système de repérage tridimensionnel.

Les problèmes posés dans ce cadre relèvent du type de problèmes étudiés en dessin technique, et concernent la coordination des vues d'un objet pour construire une représentation mentale de cet objet. Une nuance fondamentale existe, pourtant, entre cette logique du dessin technique et celle de nos tâches, nuance résultant de la différence des objectifs: dans nos tâches, l'objet est connu (donné réelle-

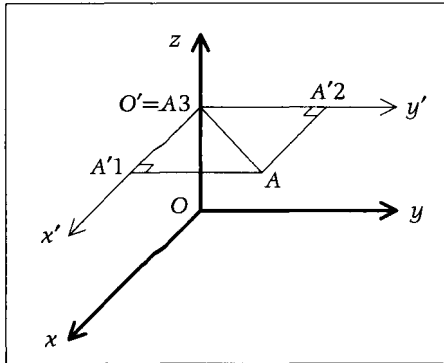


Figure 9

In the **Figure 9**, the projection was carried out on the  $\overline{Oz}$  axis; the coordinates of point A are the coordinates of A in  $(\overline{O'x'}, \overline{O'y'})$ ,  $\overline{OA3}$ . Underlying this system of projections is a conception of space that we shall refer to as "stratified." According to that conception, space will be stratified by families of planes that are parallel to the three axes of the trihedron. It should be noted that the software used in this study is based on a stratified conception of space.

The coordination of the space of the three windows evolved through a number of stages that exceed the scope of this paper (for further information, see [7]). However, the successive stages can be summarized as follows:

- the absence of a fixed system of reference;
- the existence of a fixed system of reference linked to an object;
- the existence of a fixed system of reference independent of the object.

## Bibliography / Bibliographie

- [1] Audibert G., Keita B., (1987). « La perspective cavalière et la représentation de l'espace ». *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, Actes du Colloque de Sévres*, 109-125, La pensée Sauvage, Grenoble.
- [2] Bautier T., (1987). « Étude didactique de l'introduction à l'apprentissage de la perspective conique ». *Le dessin technique*, Hermès, Paris.
- [3] Bessot A., Dolle J.M., Eberhard M., Osta I., Polo M., (1988). *Maîtrise des rapports avec l'espace physique: repérage dans l'espace et projection orthogonale*. Rapport de recherche, compte rendu d'une recherche financée par le (Research report on a study funded by the) Ministère Français de la Recherche et de la Technologie, IMAG, Grenoble.
- [4] Caron-Pargue J., (1979). *Étude sur la représentation du cube chez les enfants de 11 à 13 ans*. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle (Doctoral dissertation), Université Paris V.
- [5] Dolle J.M., (1985). « Analyse de quelques procédures cognitives d'élèves de L.E.P. en situation de lecture-écriture du dessin technique ». *Bulletin de psychologie*, tome XXXV III, n° 369, 335-345.
- [6] Laborde C., (1985). « Quelques problèmes d'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire ». *For the Learning of Mathematics* 5, 3, p.27-34. ILM Publishing Association, Montréal, Québec.
- [7] Osta I., (1988). *L'ordinateur comme outil d'aide à l'enseignement : Une séquence didactique pour l'enseignement du repérage dans l'espace à l'aide de logiciels graphiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [8] Parzys B., (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse de l'Université Paris VII, Paris.
- [9] Piaget J., (1961). *Les mécanismes perceptifs, modèle probabiliste, analyse génétique, relations avec l'intelligence*. PUF, Paris.
- [10] Piaget J., (1974). *La prise de conscience*. PUF, Paris.
- [11] Rabardel P., Weill-Fassina A. (Eds.), (1984). *L'apprentissage de la géométrie du dessin technique; des constats d'échecs et des moyens de réussite*. INRP, Paris.
- [12] Sanchez L.P., (1980). *La représentation graphique de l'espace chez l'enfant et chez l'adulte peu scolarisé*. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université Paris VII.

ment, dessiné, ou bien connu des élèves). L'objectif est d'utiliser l'espace de l'objet comme modèle pour la construction d'une représentation de l'espace du logiciel. Or ce dernier est régi par un système de référence tridimensionnel, résultat de la coordination de repérages bidimensionnels; il a servi à son tour, et à travers les correspondances (coordonnées → dimensions principales) à la construction d'une représentation d'un système de référence qui pourrait organiser l'espace de l'objet.

La structure du repère tridimensionnel que les élèves ont construit a été favorisée par celle du logiciel. Cette structure repose sur une « stratification de l'espace » par trois catégories de plans parallèles, dans chacune des directions principales de l'espace.

Pour mieux comprendre cette structure, regardons la manière de se représenter le système de projections d'un point de l'espace : repérer un point A de l'espace revient à le projeter sur un des axes du trièdre. Le repérage du point A revient alors à la conjonction de deux informations: sa coordonnée selon cet axe, et ses coordonnées dans un repère bidimensionnel, obtenu en projetant le repère plan du trièdre, orthogonal à l'axe, dans un plan parallèle, passant par la projection de A sur l'axe.

Dans la **figure 9**, la projection a été effectuée sur l'axe  $\overline{Oz}$ ; les coordonnées du point A sont données par : (les coordonnées de A dans  $(\overline{O'x'}, \overline{O'y'})$ ,  $\overline{OA3}$ ). À cette représentation du système de projections est sous-jacente une conception de l'espace que nous appellerons « conception stratifiée »; selon cette conception, l'espace sera stratifié par des familles de plans parallèles aux trois axes du trièdre. Notons que le logiciel utilisé dans notre recherche est basé sur une telle représentation de l'espace.

Cette coordination des trois espaces des fenêtres a évolué à travers plusieurs étapes que cette communication ne peut pas rapporter (pour plus d'information, cf. [7]). Nous nous contentons ici de mentionner que ces étapes ont été caractérisées successivement par :

- la non-existence de référentiel fixe ;
- l'existence d'un référentiel fixe lié à l'objet ;
- l'existence d'un référentiel fixe indépendant de l'objet.