



Development of the spatial perception with the help of projections

Janos J. Baracs

Université de Montréal
École d'architecture
C.P. 6128, succursale A
Montréal (Québec)
H3C 3J7 Canada

Abstract

The intention of this paper is to promote the process of projecting and its inverse process of lifting as an important tool to explore and understand (to perceive) the 3-dimensional space. A new type of descriptive geometry is presented, whose objective is to help the investigation of the projective properties of 3-space. It is followed by an application, using projections and liftings in 2, 3, and 4 dimensions.

1. Spatial perception and projections

First, we are supposed to tell what we mean by spatial perception. There are many definitions in the literature, proposed by psychologists, didacticians, geometers and dilettantes. We do not dare to enter this ongoing debate. We humbly propose in this paper to equate spatial perception with the understanding of our three dimensional space.

Space has an invisible but omnipresent geometrical structure. To understand and appreciate space, we must explore this structure. It gives us freedom and restrictions, which are

Le développement de la perception spatiale à l'aide des projections

Résumé

On veut, par cet article, promouvoir le processus de projection et son inverse, le processus de relèvement, comme d'importants outils pour explorer et comprendre (percevoir) l'espace tridimensionnel. On y présente un nouveau type de géométrie descriptive dont l'objectif est l'aide à la recherche des propriétés projectives de l'espace tridimensionnel. Cette présentation est suivie d'une application qui utilise les projections et les relèvements en deux, trois et quatre dimensions.

1. Perception spatiale et projections

Nous devrions d'abord préciser ce que nous entendons par perception spatiale. On retrouve dans la littérature plusieurs définitions proposées par des psychologues, des didacticiens, des géomètres et des dilettantes. Nous n'osons pas nous insérer dans ce débat. Nous proposons plutôt humblement de considérer pour les besoins de cet article que la perception spatiale n'est autre que la

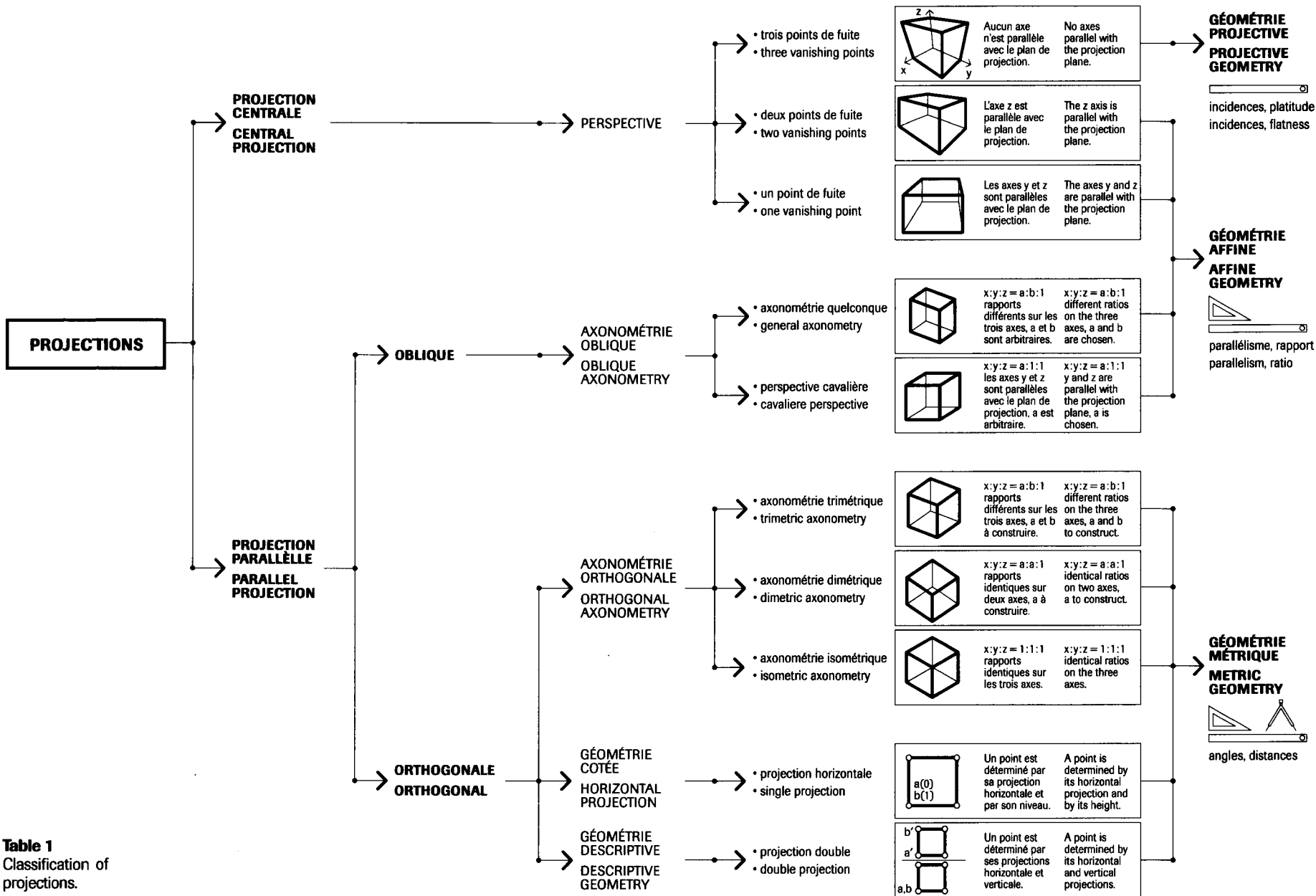


Table 1
Classification of projections.

Tableau 1
Classification des projections.

best revealed when space is transformed into the plane. The simplest transformation is projection. To project, one has to follow conventions and obey rules. But to limit our skills only to know how to project, it is like learning how to write without being able to read. Thus, preparing a drawing, projecting a three dimensional scene onto the plane is a one way process. We are trying to name the inverse action: in the technical language the expression "reading a drawing" is used. The fact that our language does not have a particular term, indicates that this crucial spatial endeavour is ignored.

Our research group began to use the term "lifting" in shop talk. We want to suggest in this paper that lifting is as important as projecting and it is a necessary maneuver to understand and manipulate space. We will show examples, how lifting 2-D configurations into 3-space or 3-D configurations into 4-space allows us reveal some intriguing properties of these configurations.

Lifting is a more complicated process than projecting. We included **Table 1**, which presents a classification of the most commonly used projections. For more detailed explanation, we refer the reader to reference books on the subject. (In **Table 1** and elsewhere in this paper we talk about projective, affine and metric geometries, which are well explained in an excellent book by H.S.M. Coxeter [4]. We probably know all the answers about projections, but we are still puzzled by many open questions about lifting. It is an upcoming topic in computer science, robotics, artificial intelligence and scene analysis.

Projecting and lifting is really a passage back and forth between adjacent universes: between two and three dimensions, between three and four dimensions. Probably no one will ever express visually better the former than M.C. Escher in the lithograph *Drawing Hands* (1948), where his fascination with the concepts of passage between dimensions and infinity is captured so well.

Bon voyage!

2. Projections and questions

We chose the simple but important case of two skew lines in 3-space as an example to compare different systems of projections.

Let us assume that the drawings in **Figures 1, 2** and **3** are parallel projections. However, the questions are such, that the type of projection (central, parallel or orthogonal) chosen for

compréhension de notre espace tridimensionnel.

L'espace possède une structure géométrique invisible mais omniprésente. Pour comprendre et apprécier l'espace, on doit explorer cette structure. Elle nous donne à la fois la liberté et des restrictions, qui se révèlent mieux lorsque l'espace est transformé dans le plan. La transformation la plus simple est la projection. Pour effectuer une projection, on doit suivre des conventions et obéir à des règles. Mais limiter nos compétences à la seule projection, ce serait comme apprendre à écrire sans être capable de lire. Ainsi, la préparation d'un dessin, projection d'une scène tridimensionnelle sur le plan, est un processus à sens unique. Nous tentons d'attribuer un nom à l'action inverse: en langage technique, on utilise l'expression « lire un dessin ». Le fait qu'il n'existe pas de terme consacré pour ce concept indique à quel point cette cruciale tentative spatiale est dans l'ombre.

Notre groupe de recherche a commencé à utiliser dans son jargon le terme de « relèvement ». Nous voudrions dans cet article avancer l'idée que le relèvement est aussi important que la projection et que c'est une manoeuvre nécessaire pour comprendre et manipuler l'espace. Nous montrerons par des exemples comment le relèvement d'une configuration bidimensionnelle dans l'espace tridimensionnel ou d'une configuration tridimensionnelle dans l'espace à quatre dimensions nous permettent de révéler certaines propriétés fascinantes de ces configurations.

Le relèvement est un processus plus complexe que la projection. Nous présentons, au **tableau 1**, une classification des projections usuelles. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux livres de référence sur le sujet. (Dans le **tableau 1** et ailleurs dans cet article, nous utilisons les concepts de géométries projective, affine et métrique, qui sont tous bien expliqués dans un excellent livre de H.S.M. Coxeter [4]. Nous connaissons probablement toutes les réponses concernant les projections, mais nous demeurons perplexes devant plusieurs questions ouvertes au sujet des relèvements. Il s'agit d'un sujet imminent dans les domaines de l'informatique, de la robotique, de l'intelligence artificielle et de l'analyse de scènes.

La projection et le relèvement constituent un passage qui permet un va-et-vient entre deux univers adjacents: entre des univers à deux et trois dimensions, entre des univers à trois et quatre dimensions. Il est probable que personne n'exprimera jamais visuellement ce fait mieux que M.C. Escher dans la lithographie *Mains dessinant* (1948) dans laquelle il a si bien

the following discussion is irrelevant.

Figure 1a depicts the projection of the two skew lines. Let us now reverse the process of the projection: the two original skew lines are removed from the scene and we should try to “lift” back the drawing into 3-space. Certain geometrical properties of the two skew lines, which were readily visible or verifiable in 3-space are completely lost in the projection, thus the reconstruction or lifting is ambiguous. We have four unanswered questions regarding the properties of the two skew lines:

1. **Figure 1b**—were the lines in 3-space straight or curved?
2. **Figure 1c**—were the lines in 3-space co-planar or skew?
3. **Figure 1d**—if the lines are skew, how is their visibility?
4. **Figure 1e**—what is their distance and their angle in 3-space?

Questions #3 and #4 need some clarification. When you view two skew lines in 3-space, one point on one of the lines is “hidden” by a particular point on the other line. These two points are on a third line connecting your view point (the focal point on your retina) with the skew lines. We may also say that this third line is the unique line concurrent to the two skew lines and passing through a given point (the view point or the centre of the projection). Thus this visibility question leads to two options, and they are expressed graphically in **Figure 1d** by interrupting the line that appears to be “behind.”

Question #4 is in the domain of metric geometry. The distance of two skew lines is the distance between the two nearest points, one on each line. The angle of two skew lines is the angle of two concurrent lines, parallel to the two skew lines.

The single projection shown in **Figure 1a** does not contain the necessary information to answer any of these questions. Let us put aside the fourth question for now. Since the first three questions are related to projective properties, we may say that the given drawing is not *determined* projectively. A projectively determined drawing contains all the information necessary to answer all questions about projective properties. To extract these information you may have to execute some constructions.

We assume in the following that our lines are straight lines, thus we will compare different projection systems by limiting our interest only to Question #2 and Question #3.

Evidently the projection in **Figure 1a** is too simple to answer the most basic question of concurrence. In **Figures 2**

rendu son attrait pour les concepts de passage entre les dimensions et l'infini.

Bon voyage! [En français dans le texte]

2. Projections et questions

Nous avons choisi comme exemple pour comparer différents systèmes de projections le cas simple mais important de deux droites gauches dans l'espace tridimensionnel.

Acceptons le fait que les dessins des **figures 1, 2 et 3** sont des projections parallèles. Toutefois, les questions sont telles que le type de projection (centrale, parallèle ou orthogonale) choisi n'interfère pas dans la discussion.

La **figure 1a** représente la projection des deux droites gauches. Tentons maintenant de renverser le processus de la projection: les deux droites gauches originales sont sorties de la scène et on doit essayer de « relever » le dessin dans l'espace tridimensionnel. Certaines propriétés géométriques des deux droites gauches, qui étaient aisément visibles ou vérifiables dans l'espace tridimensionnel, sont complètement perdues par le processus de projection; la reconstruction ou le relèvement est donc ambigu. Quatre questions concernant les propriétés des deux droites gauches demeurent sans réponse:

1. **Figure 1b**—les lignes étaient-elles droites ou courbes dans l'espace tridimensionnel?
2. **Figure 1c**—les lignes étaient-elles coplanaires ou gauches dans l'espace tridimensionnel?
3. **Figure 1d**—si les droites sont gauches, qu'en est-il de leur visibilité?
4. **Figure 1e**—quel est leur distance et leur angle dans l'espace tridimensionnel?

Les questions #3 et #4 nécessitent certaines clarifications. Lorsqu'on regarde deux droites gauches dans l'espace tridimensionnel, un point sur l'une des droites est « caché » par un point particulier de l'autre droite. Ces deux points se situent sur une troisième droite qui joint notre point de vue (le foyer sur notre rétine) avec les deux droites gauches. On peut également dire que cette troisième droite est l'unique droite concurrente aux deux droites gauches et passant par un point donné (le point de vue ou le centre de la projection). Ainsi, cette question de visibilité mène à deux options; elles sont graphiquement exprimées à la **figure 1d** par l'interruption de la droite qui apparaît être « derrière ».

La question #4 relève du domaine de la géométrie métrique. La distance entre deux droites gauches est la distance

and 3 we also project skew lines but they are part of a cube. Is now the concurrence determined?

Figure 2a depicts the parallel projection of a wire frame cube. **Figures 2a** and **2b** show the two possible options, a view from the top and a view from the bottom, indicating the visibility of the two pairs of skew lines, AB-CD and AE-CF. Thus the projection is still not determined. If, however one of the two options is selected for one pair of skew lines, the visibility of the other pair is uniquely determined. The conflict is shown in **Figure 2c**. This is the well known "cuboid" or often called an impossible figure, explored in the famous engraving of M.C. Escher, entitled *The Belvedere*.

These impossible figures are topics of a new branch of computer science, called Visual Scene Analysis. We find the term "impossible figure" somewhat unfortunate. For instance, the projection in **Figure 2c** can be lifted in space into a shape that has eight vertices, 12 straight edges and six quadrilateral faces. These faces however will be skew and self-intersecting. Thus the figure is not at all impossible as long as we do not

entre leurs deux points les plus près. L'angle entre deux droites gauches est égal à l'angle entre deux droites concourantes, parallèles aux deux droites gauches.

L'unique projection illustrée à la **figure 1a** ne contient les informations nécessaires pour répondre à aucune de ces questions. Mettons de côté, pour l'instant, la quatrième question. Puisque les trois premières sont liées à des propriétés projectives, on dira que le dessin en question n'est pas projectivement déterminé. Un dessin projectivement déterminé contient toutes les informations nécessaires pour répondre à toutes les questions sur les propriétés projectives. Afin d'extraire ces informations, on doit exécuter certaines constructions.

Nous supposons pour la suite que nos lignes sont des droites; nous comparerons ainsi différents systèmes de projection en nous limitant aux questions #2 et #3.

Il est évident que la projection de la **figure 1a** est trop simple pour répondre à la question la plus fondamentale du concours des deux droites. Aux **figures 2** et **3**, nous avons aussi projeté des droites gauches mais elles appartiennent à un cube. Le concours est-il maintenant déterminé?

La **figure 2a** montre la projection parallèle de la structure squelettique d'un cube. Les **figures 2a** et **2b** montrent les deux possibilités, une vue du dessus et une vue du dessous, en indiquant la visibilité des deux paires de droites gauches, AB-CD et AE-CF. Ainsi, la projection n'est pas encore déterminée. Si, toutefois, l'une des deux possibilités est choisie pour une paire de droites gauches, la visibilité de l'autre paire est uniquement déterminée. La **figure 2c** illustre le conflit. Il s'agit du fameux «cuboïde», appelé souvent figure impossible, étudié dans la célèbre lithographie de M.C. Escher intitulée *Belvédère*.

Ces figures impossibles sont l'objet d'une nouvelle branche de l'informatique appelée l'analyse des scènes visuelles. Le terme de «figure impossible» est, selon nous, quelque peu inadéquat. La projection de la **figure 2c**, par exemple, peut être relevée dans l'espace en une forme qui possède huit sommets, douze arêtes droites et six faces quadrilatères. Ces faces seront toutefois gauches et posséderont des auto-intersections. Ainsi, la figure n'est pas du tout impossible en autant que nous ne lui imposons pas le nom de «cube». Le lecteur patient pourra faire un modèle squelettique de ce monstre. Lorsqu'on le regarde d'un certain point, il apparaîtra exactement comme la projection de la **figure 2c**.

La **figure 3** (Baracs [2]) illustre un exercice de classe ty-

Figure 1
Questions on two skew lines.
Questions au sujet de deux droites gauches.

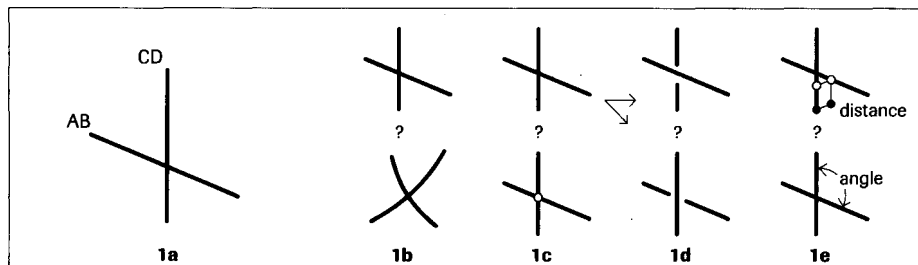


Figure 2
Possible and "impossible" objects.
Objets possibles et «impossibles».

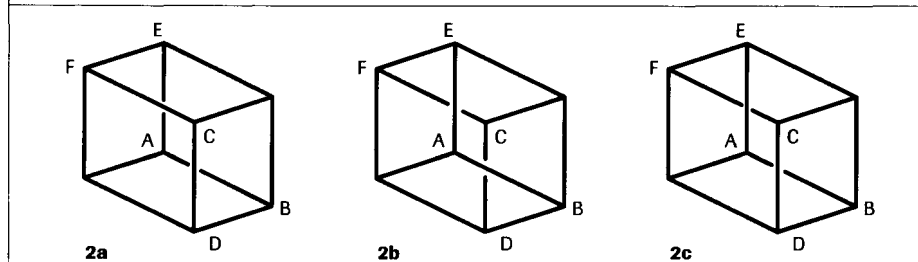
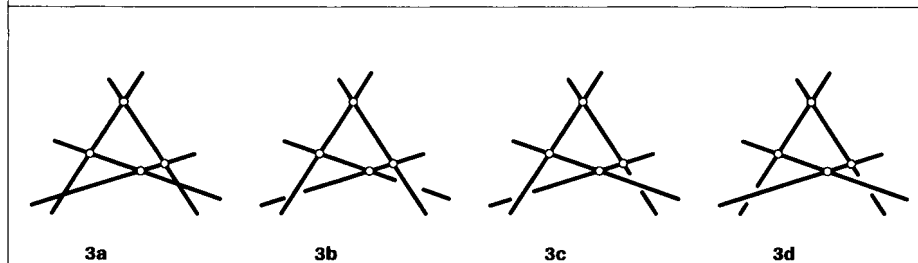


Figure 3
The visibility of skew lines.
La visibilité des droites gauches.



impose the name “cube” on it. The patient reader should make a wire model of this monster. When it is viewed from a particular point, it will appear exactly as the projection in **Figure 2c**.

A typical exercise we used in class rooms to enhance the spatial perception of our students is shown in **Figure 3** (Baracs [2]). The skew quadrilateral ABCD is projected onto the plane. The vertices A, B, C and D are real, but the apparent intersections M and N do not exist in 3-space. The lines AB, BC, CD and AD are not in the same plane. From this information we conclude, that the lines AB and CD as well the lines BC, and AD are not coplanar. The question is the visibility at M, and N. This problem is very similar to the previous problem: you may select the visibility option at one location, the option at the other location is now determined. **Figures 3b** and **3d** are the correct solutions, the projection in **Figure 3c** is impossible if we insist that all the lines are straight.

We suggest, that one single projection is not sufficient to determine concurrence and visibility. We will see in the next section, that we need two projections in general to verify these properties.

3. The classical descriptive geometry

The most widely used (and the least understood) double projection system is called descriptive geometry. It was created by the French military engineer Gaspar Monge at the end of the XVIII century and was first taught at the *École Polytechnique* in Paris around the same time (Monge [6]).

Figure 4 describes the conventions used in descriptive geometry. The point A is projected perpendicular to a horizontal plane into the point a, and projected also perpendicular to a vertical plane into the point a' (**Figure 4a**). The next step is shown in **Figure 4b**, where the point A is now removed. In **Figure 4c** we rotate the vertical plane into the horizontal plane about their intersection and finally in **Figure 4d** we see the two coded projections separated by the intersection of the two projection planes. It is evident, that the two projections of a point in this system have to lie on a line perpendicular to the intersection line. In this last image we removed the boundaries of the two projection planes, since they do not serve any useful purpose.

Before going on to the representation of two skew lines in descriptive geometry, it seems opportune to point out the essence of this method.

pour améliorer la perception spatiale de nos étudiants. Le quadrilatère gauche ABCD est projeté sur le plan. Les sommets A, B, C et D sont réels, mais les intersections apparentes M et N n'existent pas dans l'espace tridimensionnel. Les droites AB, BC, CD et AD n'appartiennent pas au même plan. De cela, on conclut que les droites AB et CD de même que les droites BC et AD ne sont pas coplanaires. La question est la visibilité en M et N. Ce problème est très similaire au problème précédent: on peut choisir l'option de visibilité en un lieu, la visibilité pour l'autre lieu est alors déterminée. Les **figures 3b** et **3d** sont les solutions correctes, la projection de la **figure 3c** est impossible si on exige que toutes les lignes soient des droites.

Nous avançons qu'une seule projection n'est pas suffisante pour déterminer le concours et la visibilité. Nous verrons à la section suivante qu'il nous faut en général deux projections pour vérifier ces propriétés.

3. La géométrie descriptive classique

Le système à double projection le plus largement utilisé (et le moins compris) est appelé géométrie descriptive. Il a été créé par l'ingénieur militaire français Gaspar Monge à la fin du XVIII^e siècle et a été enseigné à l'École Polytechnique de Paris à peu près à la même époque [6].

Les conventions utilisées en géométrie descriptive sont décrites à la **figure 4**. Le point A est projeté de façon perpendiculaire sur un plan horizontal en un point a, et projeté aussi de façon perpendiculaire sur un plan vertical en un point a' (**figure 4a**). L'étape suivante est illustrée à la **figure 4b**, où le point A est maintenant enlevé. À la **figure 4c**, on a effectué une rotation du plan vertical vers le plan horizontal autour de leur intersection; enfin, à la **figure 4d**, on peut voir les deux projections codées séparées par l'intersection des deux plans de projection. Il est évident que les deux projections d'un point dans ce système doivent se situer sur une droite perpendiculaire à la droite d'intersection. Dans ce dernier dessin, les frontières des deux plans de projection ont été retirées puisqu'elles sont inutiles.

Avant d'aller plus loin dans la représentation de deux droites gauches en géométrie descriptive, il semble opportun de préciser l'essence de cette méthode.

Même à la fin du XVIII^e siècle, il n'y avait rien de nouveau à propos de la projection orthogonale d'un objet sur deux plans perpendiculaires. Vitruvius, l'architecte écrivain romain,

Even at the end of the XVIII century, there was nothing new about the orthogonal projection of an object onto two perpendicular planes. Vitruvius, the roman architectural writer used the terms *ichnography* and *orthography* to describe the concepts of the ground plan and the elevation, which are exactly double orthogonal projections (Vitruvius [7]). The new, and generally not very well understood idea introduced by Monge in descriptive geometry is the linking of the two projections in order to extract hidden informations about geometrical properties. The representation of the two skew lines with the help of descriptive geometry will demonstrate this linkage, the simultaneous constructions in two projections.

Two lines are represented in double projections in **Figure 5**. We can now easily recognize in **Figure 5a** that the lines AB and BC are coplanar: the intersections b and b' of the two lines in the two projections lie on a perpendicular line to the reference line. If a point is situated on a line, the projection of this point must lie on the projection of the line. Thus the point B is a common point of the two lines! Not so in **Figure 5b**. Here

a utilisé les termes *ichnographie* et *orthographie* pour décrire les concepts de vue en plan et d'élévation qui constituent exactement une paire de projections orthogonales [7]. La nouvelle idée, généralement assez peu comprise, introduite par Monge en géométrie descriptive, est le lien des deux projections dans le but d'extraire des informations cachées sur les propriétés géométriques. La représentation des deux droites gauches à l'aide de la géométrie descriptive démontrera ce lien, les constructions simultanées dans les deux projections.

La **figure 5** représente deux droites en double projections. On peut maintenant facilement reconnaître dans la **figure 5a** le fait que les deux droites AB et CD sont coplanaires: les intersections b et b' des deux droites dans les deux projections se situent sur une droite perpendiculaire à la droite de référence. Si un point est situé sur une droite, la projection de ce point doit se situer sur la projection de la droite. Ainsi, le point B est un point commun des deux droites! Ce n'est pas le cas dans la **figure 5b**. Ici, les points communs des mêmes projections, M et N, ne sont pas les projections d'un seul point puisque la droite les liant n'est pas perpendiculaire à la droite de référence.

On veut ensuite indiquer la visibilité des deux droites gauches dans les deux projections. La méthode est décrite à la **figure 6**. Le point commun des deux projections verticales a' b' et c' d' est en réalité la coïncidence des projections de deux points distincts de l'espace tridimensionnel: nommons X celui qui se situe sur la droite AB, le point Y se situant sur la droite CD. Leurs projections verticales coïncident, mais leurs projections horizontales x et y sont distinctes et se trouvent à l'endroit où la droite perpendiculaire à la droite de référence provenant de x' rencontre les projections ab et cd, en x et y respectivement. Si on se demande maintenant lequel des deux points (x' ou y') de la projection verticale est le plus proche de l'observateur, la projection horizontale nous fournit la réponse. Le point x apparaît avant le point y, ce qui signifie que la droite AB est devant la droite CD dans la projection verticale. Cette relation est indiquée à la **figure 6b**, où la projection c' d' est interrompue ou passe «derrière» la projection a' b'.

Pour indiquer la visibilité dans la projection horizontale, il suffit de renverser le processus et de reformuler la question. Des deux points X et Y, lequel est au-dessus de l'autre? À la **figure 6c**, on voit que le point Y de la droite CD est au-dessus du point X de la droite AB, puisque y' est au-dessus de x' dans

Figure 4
Conventions in descriptive geometry.
Conventions de la géométrie descriptive.

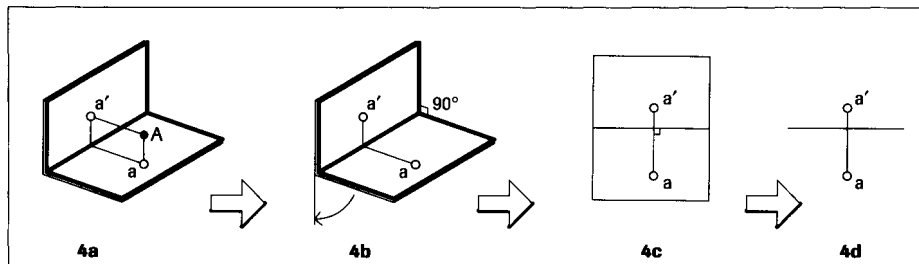


Figure 5
Co-planar and skew lines in double projections.
Droites coplanaires et droites gauches en doubles projections.

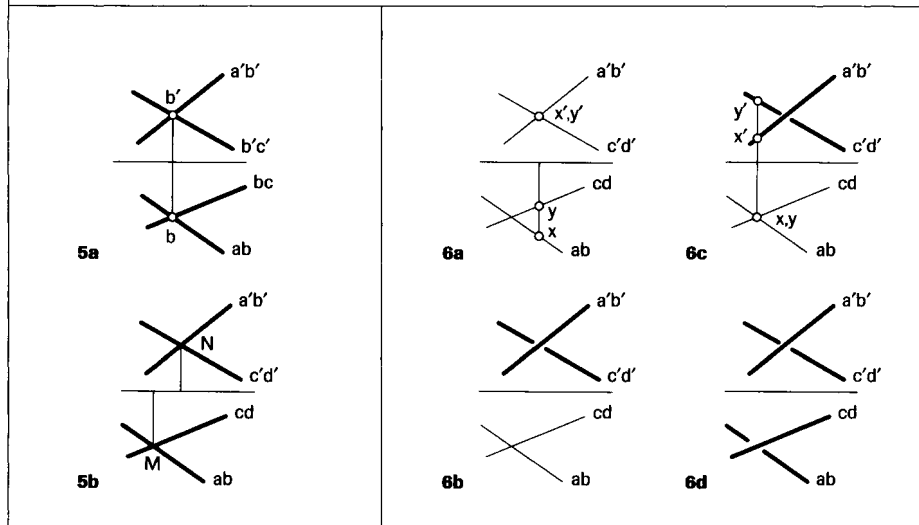


Figure 6
The visibility of skew lines in double projections.
La visibilité des droites gauches en doubles projections.

the common points of the same projections, M and N, are not the projections of a single point, since their join is not perpendicular to the reference line.

Next we want to indicate the visibility of the two skew lines in both projections. The method is described in **Figure 6**. The common point of the two vertical projections $a'b'$ and $c'd'$ is actually the coinciding projections of two distinct points in 3-space: we assign X to be on the line AB, the point Y on the line CD. Their vertical projections coincide, but their horizontal projections x and y are distinct and you find them, where the line perpendicular to the reference line issued from x' meets the projections ab and cd , in the points x and y respectively. Now if we ask the following question: which of the points (x' or y') in the vertical projection is closer to the viewer, the response is given in the horizontal projection. The point x is before the point y , which means that the line AB is ahead of the line CD in the vertical projection. This relation is indicated in **Figure 6b**, where the projection $c'd'$ is interrupted or passing "behind" the projection $a'b'$.

To indicate the visibility in the horizontal projection, we just have to reverse the process and reformulate the question. Of the two points X and Y, which one is above the other. In **Figure 5c** we see that the point Y on the line CD is above of the point X on the line AB, since y' is above x' in the projection vertical. Now we settled the visibility problem in the horizontal projection, the line AB is passing "under" the line CD. The complete visibility solution is shown in **Figure 6d**.

We demonstrated here how the methods of descriptive geometry allow us to answer Question #2 and #3 listed in Section 2. We also have the answer to Question #1: lines AB and CD are obviously straight lines since both of their projections are straight lines. What about Question #4 concerning the distance and the angle of the two skew lines in 3-space? Since the orthogonal projection used in descriptive geometry is a metric operation, the two projections are sufficient to find these metric properties. To do so, the reader should master some additional methods described in descriptive geometry textbooks.

It is undeniable, that the two orthogonal projections in descriptive geometry are not the best pictures to synthesize in a single spatial image. But this is a small price to pay for the convenience of having all the geometric properties available for inspection. We also found through several decades of teaching experience, that this abstraction in descriptive ge-

la projection verticale. Nous avons maintenant résolu le problème de la visibilité dans la projection horizontale, la droite AB passe « sous » la droite CD. La solution complète de la visibilité est illustrée à la **figure 6d**.

Nous avons démontré ici comment les méthodes de la géométrie descriptive nous permettent de répondre aux questions #2 et #3 énoncées à la section 2. On a aussi la réponse à la question #1 : les lignes AB et CD sont évidemment des droites puisque leurs deux projections sont des droites. Qu'en est-il de la question #4 concernant la distance et l'angle des deux droites gauches dans l'espace tridimensionnel ? Puisque la projection orthogonale utilisée en géométrie descriptive est une opération métrique, les deux projections sont suffisantes pour calculer ces propriétés métriques. Pour ce faire, le lecteur devra maîtriser certaines méthodes additionnelles décrites dans les manuels de géométrie descriptive.

Il est indéniable que les deux projections orthogonales en géométrie descriptive ne constituent pas les meilleurs dessins pour synthétiser une image spatiale. Mais cela représente un prix minime à payer face à l'avantage de pouvoir explorer toutes les propriétés géométriques. Nous avons également constaté au cours de plusieurs décades d'expérience d'enseignement que cette abstraction en géométrie descriptive en fait un excellent outil didactique pour améliorer les habiletés spatiales de nos étudiants.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous avons limité l'objet de cet article aux propriétés projectives du concours et de la visibilité. Mais, comme nous l'avons vu, la géométrie descriptive va beaucoup plus loin que le domaine projectif : elle permet aussi de résoudre des problèmes affines et métriques. On peut affirmer qu'un dessin en géométrie descriptive est métriquement déterminé. Peut-on concevoir un système de projection plus simple qui limiterait sa portée aux propriétés affines et projectives ? À la section suivante, nous présentons deux tels systèmes.

4. Deux nouveaux systèmes de projection

Si on nomme le nouveau système « géométrie descriptive projective », la géométrie descriptive classique devrait alors être renommée « géométrie descriptive métrique ». On voudrait répondre à toutes les questions relevant des propriétés projectives et affines et rien d'autre. On cherche à établir un système de référence minimal qui requiert le moins d'input possible.

On parle habituellement de projections lorsqu'on veut

ometry makes it an excellent didactic tool to enhance the spatial ability of our students.

As we mentioned earlier, we limited our interest in this paper to the two projective properties of concurrence and visibility. But as we have seen, descriptive geometry goes far beyond the projective level, it also solves affine and metric problems. We may say that a descriptive geometry drawing is metrically determined. Can we devise a simpler system of projection, which limits its scope to projective and affine properties? Two such systems are presented in the next Section.

4. Two new projection systems

If we name the new system *projective* descriptive geometry, the classical descriptive geometry then should be renamed to *metric* descriptive geometry. We want all the answers related to projective and affine properties and no more. We want to establish a minimal reference system, which requires the least amount of input.

We usually talk about projections when we want to represent the three dimensional reality in two dimension. It is lesser known, that cross-sections (plane-cuts) are equivalent to projections and they can be used to represent objects. In fact, projections are cross-sections themselves: it is a plane-cut of the cone whose apex is the centre of the projection, its generators are the projectors (lines linking the centre with the points of the projected object).

Our new reference system is illustrated in **Figure 7a**. It consists of two projection planes OPQ and PQR meeting in the line PQ. The angle between the two planes is irrelevant! Lines and planes are represented in this system by their cross-sections on the planes OPQ and PQR. Points are installed on a determined line or plane. To create the desired two dimensional picture, the two cross-sections are projected in a new reference plane. If this projection is central, the system is a projective descriptive geometry, if the projection is parallel, it should be called *affine* descriptive geometry. All the drawings in Section 6 are drawn with the affine descriptive geometry system. All the methods are the same in the two systems from the user's point of view, the only difference is that in the affine system parallelism is recognized.

This description may seem confusing, or complicated. In fact, this system is much simpler and visually more rewarding than descriptive geometry. The two examples presented below will support this argument. We do not claim, however,

représenter en deux dimensions une réalité tridimensionnelle. Il est moins connu que les coupes transversales (sections planes) sont équivalentes aux projections et qu'elles peuvent être utilisées pour représenter des objets. En fait, les projections sont elles-mêmes des coupes transversales: il s'agit d'une section plane du cône dont le sommet est le centre de projection, ses génératrices étant les projectantes (les droites liant le centre avec les points de l'objet projeté).

Notre nouveau système de référence est illustré à la **figure 7a**. Il consiste en deux plans de projection OPQ et PQR se rencontrant sur la droite PQ. Il n'est pas nécessaire de préciser l'angle entre les deux plans! Les droites et les plans sont représentés dans ce système par leurs coupes transversales sur les plans OPQ et PQR. Les points sont installés sur une droite ou un plan déterminés. Afin de créer l'image bidimensionnelle désirée, on projette les deux coupes transversales sur un nouveau plan de référence. Si cette projection est centrale, le système relève de la géométrie descriptive projective, et si la projection est parallèle, on devrait l'appeler géométrie descriptive affine. Tous les dessins de la section 6 ont été dessinés selon le système de la géométrie descriptive affine. Toutes les méthodes se confondent dans les deux systèmes du point de vue de l'utilisateur; la seule différence réside dans le fait que le parallélisme est reconnu dans le système affine.

Cette description peut sembler déroutante, voire complexe. En fait, ce système est plus simple et visuellement plus avantageux que la géométrie descriptive. Les deux exemples présentés ci-dessous appuieront cette affirmation. Nous ne prétendons toutefois pas que ce nouveau système remplacera la géométrie descriptive classique; il lui sera seulement complémentaire. Pour toutes les demandes métriques, la « vieille » géométrie descriptive demeure le seul système de reproduction efficace connu.

Représentons maintenant deux droites gauches dans ce nouveau système. Les droites AB et CD sont indiquées par leurs intersections avec les deux plans de référence. Les droites AB et CD rencontrent le plan OPQ aux points A et C, et le plan PQR aux points B et D respectivement.

Les droites AB et CD sont-elles coplanaires? La **figure 7b** nous donne la réponse. On joint les points A et C, on étend la droite AC jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite PQ. On fait le même exercice avec les points D et B. Les droites AB et CD ne sont pas coplanaires parce que les trois droites AC, BD et PQ ne se coupent pas en un point! Explication: si AB et CD

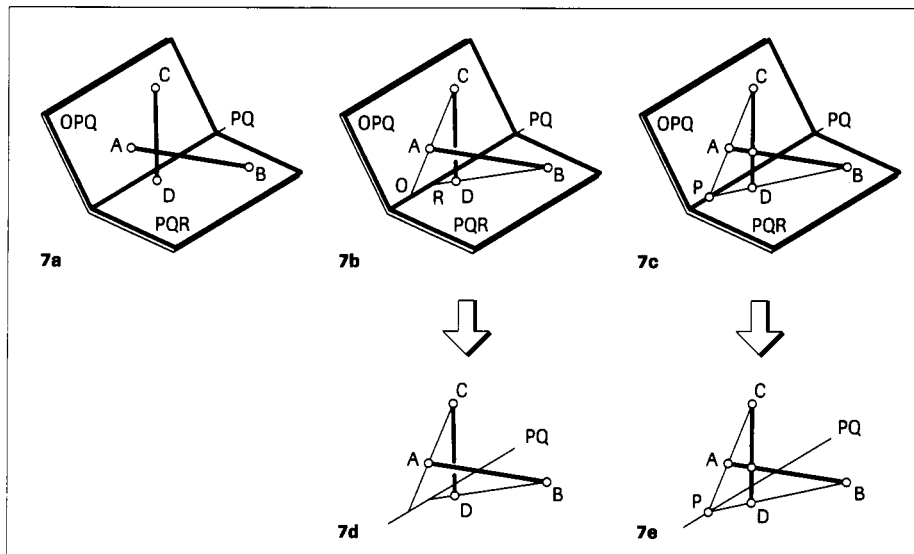
that this new system will replace the classical descriptive geometry, it will only compliment it. For all the metric inquiries the "old" descriptive geometry remains the only known efficient reproduction system.

Let us now represent two skew lines in this new system. The lines AB and CD are indicated by their intersections with the two reference planes. Lines AB and CD meet the plane OPQ in the points A and C, the plane PQR in the points B and D respectively.

Are the lines AB and CD co-planar? The answer is given in **Figure 7b**. Join the points A and C, extend the line AC until it meets the line PQ. Do the same with the points D and B. The lines AB and CD are not co-planar, because the three lines AC, BD and PQ do not meet in point! Explanation: if AB and CD were co-planar, the line AC would be the intersection of the planes OPQ and ABCD, similarly the line DB would be the intersection of the planes PQR and ABCD. Since three planes meet in a point or in a line in the projective space, the three intersection lines should also meet in a point (or coincide in a line).

Look at **Figure 7c** now: here the three lines meet in the point P, thus the lines AB and CD are co-planar. In **Figures 7d** and **7e** we removed the lines indicating the boundaries of the planes OPQ and PQR to show that they are not needed for the constructions, although they may help the user to visualize the scene.

Figure 7
A new system of representation.
Un nouveau système de représentation.



étaient coplanaires, la droite AC serait l'intersection des plans OPQ et ABCD; de façon similaire, la droite DB serait l'intersection des plans PQR et ABCD. Puisque trois plans se rencontrent en un point ou en une droite dans l'espace projectif, les trois droites d'intersection devraient aussi se rencontrer en un point (ou coïncider en une droite).

Examinons maintenant la **figure 7c**: les trois droites se coupent ici en un point P, d'où les droites AB et CD sont coplanaires. Aux **figures 7d** et **7e**, on a retiré les droites indiquant les frontières des plans OPQ et PQR pour montrer qu'elles ne sont pas nécessaires à la construction, quoiqu'elles peuvent aider l'utilisateur à visualiser la scène.

La seconde question à répondre est celle de la visibilité des deux droites gauches. Un examen attentif de la **figure 7b** est probablement plus convaincant que le raisonnement suivant. La droite AB est devant la droite CD, car le point O est devant le point R. Ou, imaginons que l'on déplace les extrémités D et B de telle sorte que le point R s'approche du point O. Ce mouvement devrait révéler la position relative des deux droites gauches. On doit noter qu'il existe une seconde possibilité de visibilité, mais nous l'ignorons car, pour cette possibilité, les segments AB et CD sont derrière les plans de référence et seraient cachés par ces plans.

Comparons maintenant ces dessins (**figure 7**) avec ceux qui permettent de résoudre le même problème en utilisant les doubles projections de la géométrie descriptive (**figures 5** et **6**). Nous n'avons ici qu'une seule image à assimiler et nous nous sentons justifiés de prétendre que les dessins de ce système sont plus simples à visualiser. Ils sont également plus simples à construire. Pour préparer les dessins dans la géométrie descriptive classique, on a besoin d'au moins deux instruments pour dessiner les droites parallèles et perpendiculaires (deux triangles de plastique glissant l'un sur l'autre ou des règles parallèles et un triangle de plastique). Ce nouveau système ne nécessite qu'une règle! Cette simplicité est conséquente avec le fait que la géométrie projective est moins spécifique que la géométrie métrique.

Tentons de résoudre un problème plus complexe de géométrie projective dans ce nouveau système (**figure 8**). Nous effectuons tout d'abord une coupe transversale du tétraèdre ABCD, en passant par les points P, Q et R situés sur les arêtes AB, AC et AD, respectivement. Ce n'est pas vraiment un problème: il suffit de joindre P et Q, Q et R, P et R (**figure 8a**). À la **figure 8b**, nous avons placé sur les arêtes d'une coupe

The second question to answer is about the visibility of the two skew lines. A good look at **Figure 7b** is probably more convincing than the following reasoning. The line AB is ahead of the line CD, because the point O is ahead of the point R. Or imagine to move the end points D and B so, that the point R approaches the point O. This motion should reveal the relative position of the two skew lines. It should be noted, that a second visibility option is possible, but we ignore it, because in this option the segments AB and CD are behind the reference planes and they would be hidden by those planes.

Now compare these drawings (**Figure 7**) with drawings solving the same problem using the double projections of descriptive geometry (**Figures 5 and 6**). Here we have a single image to digest and we feel justified to claim that drawings in this system are much simpler to visualize. They are also simpler to construct. To prepare drawings in the classical descriptive geometry, you need at least two instruments to draw parallel and perpendicular lines (two plastic triangles sliding on each other or a parallel ruler and one plastic triangle). In this new system you only need a ruler! This simplicity is consistent with the fact, that projective geometry is less specific than metric geometry.

Let us solve an other, more complex projective geometry problem in this new system illustrated in **Figure 8**. First we take a cross-section on the tetrahedron ABCD, going through the points P, Q and R located on the edges AB, AC and AD respectively. This is not really a problem, we just have to join P and Q, Q and R, P and R (**Figure 8a**). In **Figure 8b** on an arbitrary cross-section we install the points 1, 2, and 3 on the edges of the cross-section. We pose the problem in **Figure 8c**: given three points 1, 2 and 3 on the faces ABC, ACD and ABD of the tetrahedron ABCD. Construct the cross-section of the tetrahedron by the plane 1.2.3.

To expose the challenge of this problem, we show in **Figure 8d** that if you start from an arbitrary point M on line AD, and go through the points 1, 2 and 3 sequentially, you arrive in a point N on the line AD, which is evidently not a solution, the plane section has to be a closed triangle. You may improve the result by choosing an other starting point M closer to the point N, but we are not satisfied with a trial and error method. On the other hand this game implies that there is a unique solution, which in turn means that the projection in **Figure 8d** is determined. It should be noted that this illustration also permits us to reformulate the problem entirely in the plane: construct the triangle whose three vertices lie on

transversale quelconque les points 1, 2 et 3. Le problème est posé à la **figure 8c**: étant donnés trois points 1, 2 et 3 sur les faces ABC, ACD et ABD du tétraèdre ABCD, construire la coupe transversale du tétraèdre définie par le plan 1.2.3.

Pour présenter le défi de ce problème, on montre à la **figure 8d** que si on débute à partir d'un point quelconque M sur la droite AD, et qu'on passe par les points 1, 2 et 3 les uns à la suite des autres, on arrive à un point N sur la droite AD, ce qui ne constitue évidemment pas une solution, la section plane devant être un triangle fermé. On peut améliorer le résultat en choisissant un autre point de départ M plus près de N, mais nous ne nous satisferons pas d'une méthode d'essais et d'erreurs. D'autre part, ce jeu implique qu'il existe une solution unique, ce qui, à son tour, signifie que la projection de la **figure 8d** est déterminée. On doit noter que cette illustration nous permet également de reformuler entièrement le problème dans le plan: construire le triangle dont les sommets se situent sur les trois droites issues d'un point A et dont les arêtes passent par les trois points donnés de façon consécutive.

Nous voulons un argument plus solide pour montrer que le problème est déterminé par sa projection. Le dessin est établi (sans qu'on l'ait mentionné!) dans notre nouveau système. Les deux plans de référence sont ABC et ABD, et leur intersection est la droite AB. Les points 1 et 2 se situent sur les plans de référence, et le point 3 est sur le plan ACD qui est déterminé par le système car on connaît les coupes transversales de ce plan sur les plans de référence (les droites AD et AC).

Ce type d'analyse, que la projection soit déterminée ou non, devrait toujours précéder la recherche d'une solution. On a nommé cette activité *détermination* (Baracs [1]) et cela devient une branche légitime de la géométrie combinatoire.

Dans la solution de la **figure 9**, on utilisera une méthode bien connue de la géométrie descriptive. Pour trouver la section plane, on construit, en premier lieu, le point de percée de la droite 1.2 et du plan ACD. Pour ce faire, on considère un plan auxiliaire passant par les points 1 et 2 et un point L choisi arbitrairement sur la droite AB. Le plan auxiliaire L.1.2 coupe le plan ADC sur la droite MN. Les droites 1.2 et MN se coupent en un point O qui constitue le point de percée cherché sur le plan ADC. On joint les points O et 3 et on complète le triangle PQR qui est la coupe transversale résultante.

L'utilisation de la géométrie descriptive pour trouver la solution de ce problème serait d'une exécution plus longue en deux projections et serait plus difficile à visualiser. Il est vrai

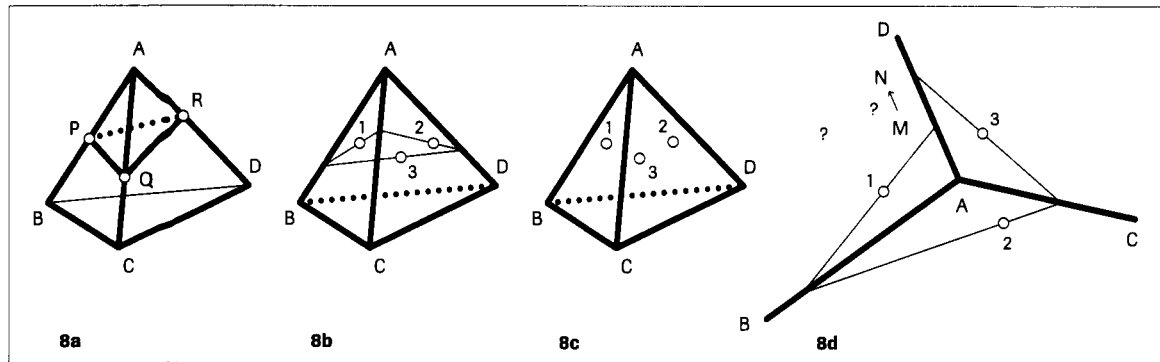


Figure 8
The problem of "3 points and 3 lines."
Le problème «des trois points et des trois droites».

Figure 9
The solution of "3 points and 3 lines."
La solution au problème «des trois points et des trois droites».

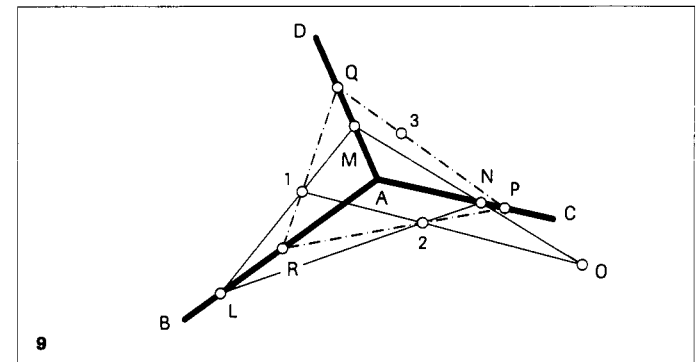
the three lines issued from the point A and whose edges passing through consecutively the three given points.

We want a stronger argument to show that the problem is determined by its projection. The drawing is prepared (without noticing it!) in our new system. The two reference planes are ABC and ABD, their intersection is the line AB. The points 1 and 2 lie in the reference planes, the point 3 is in the plane ACD, which is determined in the system, because we know the cross-sections of this plane on the reference planes (the lines AD and AC).

This kind of analysis, whether the projection is determined or not, should always precede the search for the solution. We named this activity *determination* (Baracs, [1]) and it is becoming a legitimate branch of combinatorial geometry.

In the following solution in **Figure 9** we will use a well known method from descriptive geometry. To find the plane section, first we construct the piercing point of the line 12 and the plane ACD. To do this, we take an auxiliary plane through the points 1 and 2 and an arbitrarily chosen point L on the line AB. The auxiliary plane L.1.2 meets the plane ADC in the line MN. The lines 1.2 and MN meet in the point O, which is the piercing point we were looking for on the plane ADC. Join the points O and 3 and complete the triangle PQR, which is the resulting cross-section.

Using descriptive geometry to find the solution of this problem would be longer to execute in two projections and it would be more difficult to visualize. It is a fact, that using two projections, the drawing contains more informations about metric properties. For instance we could construct the true form of the cross-section, or the angle between the cutting plane and a face plane of the tetrahedron. But, if we want to solve a projective (or affine) problem, we believe our new system is a better choice.



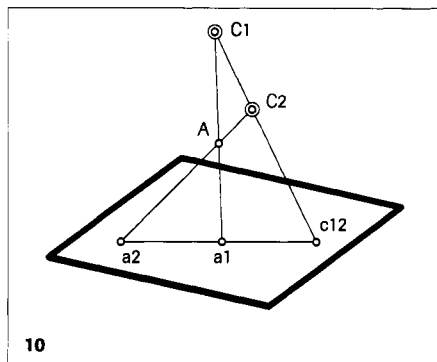
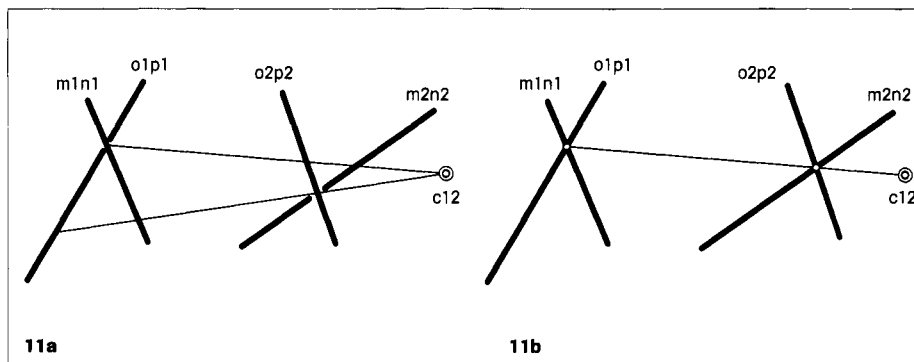


Figure 10
The second system.
Le second système.

Figure 11
Skew lines in the second system.
Droites gauches dans le second système.

Figure 12
The affine version of the second system.
La version affine du second système.



New projection systems are not that difficult to come by. To prove this point, we present here a second new system of projective (affine) descriptive geometry, not as elegant as the first system. (The impatient reader may skip the rest of this Section.)

System #2 is illustrated in **Figure 10**. Here we use one projection plane and two projection centres. The point A is projected from the centres C1 and C2 into the points a1 and a2 respectively. One more type of information has to be supplied in the projection: the piercing point c12 of the line C1.C2 on the plane. As you see, the join of the two projections of the same point (a1.a2) must go through the projected centre c12.

The problem of two skew and co-planar lines are projected in system #2 in **Figures 11a** and **11b**. In the case of the two skew lines, the visibility is also resolved in **Figure 11a**. We hope these drawings need no detailed explanations, they contain very similar constructions to the previous drawings.

The affine version of this system is shown in **Figure 12**. Here the two centres are at infinity, which means, that we project parallel with two chosen directions. The two directions determine the position of a plane (an infinite number of parallel planes), one of those meets the projection plane in the trace 1.2. The join of corresponding points (a1 a2) must lie on a line parallel to the trace 1.2.

But as we said earlier, we definitely prefer system #1, where we deal with one image instead of two.

In Sections 2, 3 and 4 we explored the links between the plane and 3-space. In Section 5 we introduce the 4-space, which will find some practical applications in Section 6.

5. An excursion into the 4th dimension

In all previously discussed projections we took a three dimensional configuration and proceeded to project it into two di-

Mais, comme nous le disions plus haut, nous préférons définitivement le système #1 où nous avons à traiter avec une seule image plutôt que deux.

Aux sections 2, 3 et 4, nous avons exploré les liens entre le plan et l'espace tridimensionnel. Nous introduisons l'espace à quatre dimensions à la section 5 et certaines de ses applications pratiques à la section 6.

5. Une excursion dans l'espace à quatre dimensions

Pour toutes les projections abordées précédemment, il s'agissait de prendre une configuration tridimensionnelle et de procéder à sa projection en deux dimensions. C'est la seule solution pratique puisque nous ne sommes pas encore capables de produire un réel dessin en trois dimensions, et il serait absurde d'effectuer la projection sur une droite. Ainsi, la méthode la plus pratique pour reproduire une scène appartenant à l'espace n -dimensionnel est de la projeter dans un espace $(n-1)$ -dimensionnel. En conséquence, les habitants de Flatland (« Terreplate », un univers bidimensionnel) devraient utiliser une droite comme cahier de dessin. Nous n'avons pas à les envier : leur géométrie descriptive est encore plus complexe que la nôtre.

Si on accepte cette convention, on devrait considérer toute scène tridimensionnelle comme le dessin—ou la projection—d'un objet à quatre dimensions. Ce faisant, nous ne dévoilons pas seulement certains des secrets de cet étrange univers, mais nous enrichissons également notre compréhension de notre propre espace tridimensionnel. Notre expérience nous dit que les étudiants motivés par la quatrième dimension développeront une méthode personnalisée de perception spatiale qu'ils pourront ensuite appliquer à plusieurs utilisations pratiques. Pour appuyer cette affirmation, nous donnerons

mension. It is the only practical solution since we are not yet capable of producing a true 3-D drawing, and it would be foolish to project onto a line. Thus the most convenient method to reproduce a scene from n -space is to project it into $(n-1)$ -space. Accordingly, the inhabitants of Flatland (a two dimensional universe) would use a line as a drafting pad. We should not envy them: their descriptive geometry is much more complex than ours.

Now if we accept this convention, we should view any three dimensional scene as a drawing—or projection—of a four dimensional object. By doing so we not only unfold some of the secrets of this strange universe, but also enrich our geometrical understanding of our own three dimensional space. It is our experience, that motivated students of the 4th dimension will develop a personalized method of spatial perception, which then can be applied to many practical uses. To support this argument, first we will give a very brief introduction to the projective geometry of the 4th dimension, then an interesting 3 dimensional geometry problem will be presented. It is quite surprising how a simple and elegant explanation can be put forward if we interpret our given problem as a 3-D projection of a 4-D configuration.

The best way to introduce, visualize, and practice projective geometry in any given dimension is to list the elements (also called the flats) like points, lines, planes, etc. and to enumerate the two basic operations, joins and meets (unions and intersections), among the elements. For instance in two dimension there are only three types of elements: points, lines and the plane. The join of two points is a line, the meet of two points is empty. The join of a point and a line is the whole plane, the meet of a point and a line is empty. The join of two lines is the whole plane, the meet of two lines is a point.

In three dimension the added element is the 3-space, consequently new operations arise. The join of a line and a plane is the 3-space, meet of a line and a plane is a point. If two lines in three dimension are coplanar (having a point in common), their join and meet are the same as in two dimension. The more interesting case is when two lines do not have a common point in three dimension. The join of two skew lines is the 3-space (we may also say, that the two skew lines span the whole 3-space), the meet of two skew lines is obviously empty.

Before entering into the fourth dimension, let us present **Table 2**. This Table is a compact and precise representation

tout d'abord une très brève introduction à la géométrie projective de la quatrième dimension ; on présentera ensuite un problème intéressant de géométrie tridimensionnelle. Il sera plutôt surprenant de constater qu'une explication simple et élégante peut être avancée si on interprète notre problème donné comme la projection tridimensionnelle d'une configuration quadridimensionnelle.

La meilleure façon d'introduire, visualiser, et pratiquer la géométrie projective dans une dimension quelconque est de dresser la liste des éléments (aussi appelés variétés linéaires projectives) comme les points, les droites, les plans, etc., et d'énumérer les deux opérations fondamentales, les jonctions et les rencontres (les unions et les intersections) entre ces éléments. En deux dimensions, par exemple, il n'y a que trois types d'éléments : les points, les droites et le plan. La jonction de deux points est une droite, la rencontre de deux points est vide. La jonction d'un point et d'une droite est le plan en entier, la rencontre d'un point et d'une droite est vide. La jonction de deux droites est le plan en entier, la rencontre de deux droites est un point.

En trois dimensions, l'élément ajouté est l'espace tridimensionnel ; conséquemment de nouvelles opérations apparaissent. La jonction d'une droite et d'un plan est l'espace tridimensionnel, la rencontre d'une droite et d'un plan est un point. Si deux droites de l'espace tridimensionnel sont coplanaires (possédant un point en commun), leur jonction et leur rencontre sont les mêmes qu'en deux dimensions. Le cas le plus intéressant se présente lorsque les deux droites ne possèdent pas de point commun en trois dimensions. La jonction de deux droites gauches est l'espace tridimensionnel (on dit aussi que les deux droites gauches engendrent l'espace tridimensionnel en entier), la rencontre de deux droites gauches est évidemment vide.

Avant d'entrer dans la quatrième dimension, présentons le **tableau 2**. Ce tableau est une représentation compacte et précise de toutes les opérations, jonctions et rencontres, en deux, trois et quatre dimensions. La compréhension de ce tableau n'est pas essentielle pour saisir la teneur du problème de géométrie projective que l'on présentera à la section suivante. Nous encourageons néanmoins le lecteur à se familiariser avec son contenu. Avec l'aide de croquis et de modèles simples, le lecteur pourra se créer une image mentale de l'ensemble des 46 opérations décrites. Il s'agit de l'un des meilleurs exercices fondamentaux pour stimuler notre perception spatiale.

of all the operations, joins and meets, in two, three and four dimensions. The understanding of this table is not necessary in order to follow our projective geometry problem to be presented in the next Section, nevertheless we urge the reader to familiarize with its content. With the help of sketches and simple models, the reader should create a mental image of all the 46 operations depicted there. This is one of the best basic exercise to stimulate our spatial perception.

The case of the two coplanar lines in three dimension is chosen to explain the use of the **Table 2**. Follow the illustration in the upper right corner of this page: first install the two elements (the two lines) as two vertices A and B on the intersections of the horizontal line denoted as "line" in the Table and the two vertical lines named 1 and 3. Now create all the possible parallelograms whose diagonal vertices are A and B and the two other vertices C and D are situated on the vertical line 2. The lower vertex C indicates the join (a plane) of the two elements in question, the upper vertex D indicates the meet (a point) of the two elements. Note that the furthest position of the lower vertex C is on the thick horizontal line denoted as "3-space", while the furthest position of the upper vertex D is on the thick horizontal line denoted as "empty". Abiding by these rules, an other parallelogram maybe constructed for the case of the two lines as you can see in **Table 2**. This second parallelogram obviously represents the join (the whole 3-space) and meet (empty) of two skew lines. Here lies the magic of this Table: it tells us in a peculiar way that two lines are either coplanar or skew. Of course we knew this without all these acrobatics, but soon this very Table will become an excellent help in the 4th dimension, where joins and meets generate more intriguing results, and are also more difficult to visualize.

Going from three to four dimension, we add a new element again, this time the 4-space. We do not suggest that it is easy to build a mental image of the 4-space. But we can do without it, if we replace the 4-space with its 3-D projection. What is important however is to grasp the concept of 3-space in four dimension. There is a misunderstanding about 3-space in our own 3-D world. In the everyday language we often hear the expression "spaces". To use this term in the geometrical sense in plural is ludicrous: our known universe is one single space, just as Flatland is one single plane. When architects talk about "spaces" in a building, they should rather say different regions of the same space.

On a choisi le cas des deux droites coplanaires en trois dimensions pour expliquer l'utilisation du **tableau 2**. Il faut suivre l'illustration du coin supérieur droit de cette page : on installe d'abord les deux éléments (les deux droites) comme deux sommets A et B sur les intersections de la droite horizontale désignée par « droite » dans le tableau et les deux droites verticales nommées 1 et 3. On crée ensuite tous les parallélogrammes dont les sommets diagonaux sont A et B et les deux autres sommets, C et D, sont situés sur la droite verticale 2. Le sommet le plus bas, C, indique la jonction (un plan) des deux éléments en question, le sommet supérieur, D, indique la rencontre (un point) des deux éléments. Notons que la position la plus éloignée du sommet inférieur C est sur la droite horizontale grasse désignée par « espace tridimensionnel », tandis que la position la plus éloignée du sommet supérieur D se situe sur la droite horizontale grasse désignée par « vide ». En demeurant fidèle à ces règles, on peut construire un autre parallélogramme pour le cas des deux droites comme on peut le voir dans le **tableau 2**. Ce deuxième parallélogramme représente évidemment la jonction (l'espace tridimensionnel entier) et la rencontre (vide) de deux droites gauches. C'est ici que se situe la magie de ce tableau : il nous indique de façon particulière que deux droites sont soit coplanaires ou gauches. Naturellement, on savait cela sans toutes ces acrobaties, mais bientôt ce même tableau sera une aide précieuse dans la quatrième dimension, où les jonctions et les rencontres génèrent des résultats plus fascinants et aussi plus difficiles à visualiser.

En passant de la troisième à la quatrième dimension, nous ajoutons encore un nouvel élément, il s'agit cette fois de l'espace quadridimensionnel. Nous ne prétendons pas qu'il est simple de se construire une image mentale de l'espace à quatre dimensions. Mais on peut s'en passer, si on remplace l'espace quadridimensionnel par sa projection tridimensionnelle. Il est important toutefois de saisir le concept de l'espace tridimensionnel en quatre dimensions. Il y a une méprise à propos de l'espace tridimensionnel dans notre propre monde 3-D. Dans le langage courant, on entend souvent l'expression « espaces ». L'emploi de ce terme au pluriel dans un sens géométrique est absurde : notre univers connu est un seul espace, tout comme *Flatland* est un seul plan. Lorsque les architectes parlent d'« espaces » dans un édifice, ils devraient plutôt dire des régions différentes du même espace.

Examinons un exemple en quatre dimensions. Il y a deux parallélogrammes décrivant les rencontres et les jonctions

Let us look at an example in four dimension. There are two parallelograms depicting the meets and joins of a line and a plane. The first one is exactly the same as in 3-D: their meet is a point, their join spans the entire 3-space. The second parallelogram however reveals a surprise for the eye trained in 3-D! Here the meet of a line and a plane is empty, (no intersection), their join is the entire 4-space. We may say, that in this case the line and the plane do not lie in the same 3-space, or they are not co-spatial. We may also use the term “skew” to describe their relative position in 4-D. We have to admit again, that it is not easy to imagine a line, which never meets a plane. Remember, that we are installed in projective spaces (now the plural is correct—why?) and in 3-D a line and a plane always meet in a point, even if the line is parallel to the plane (the point at infinity is an ordinary point of the projective space).

The meets of two planes are quite interesting in 4-D. If the planes are co-spatial (being in the same 3-space), their meet is a line as we are used to it in 3-space. But strangely, if they are not co-spatial, their meet is a point! We suggest the mental image of two plane polygons, not in the same plane, having a common vertex to visualize this scene.

We shall discuss an other example in 4-D: the meet of two 3-spaces. Actually, this is the only operation we will refer to when we examine our 3-D problem shortly. We strongly urge the reader however to study all the 26 operations shown in 4-D in Table 2 for reasons already expressed above.

Probably the most difficult visual obstacle to overcome in four dimension is the cognizance of the presence of an infinite number of 3-spaces. A 3-space is also called sometime a cell, which may help the reader to create a visual reference. We will refer soon to the meet of two 3-spaces. According to **Table 2**, their meet is (always) a plane. To help create a mental image of this scene, we project it into 3-space: just imagine now two cubes having a common face.

Table 2 indicates the dimension of the elements (D) and the rank (R) in the adjacent column, $D + 1 = R$. The rank is a more convenient number (never negative) to express the basic formula of these operations: the sum of the ranks of two flats is equal to the sum of the ranks of their join and their meet. This rule explains the reasons of the vector-parallelogram constructions!

Operations involving more than two elements, can be simply derived from **Table 2**. Let us take the example of the meet of three 3-spaces. Two 3-spaces meet in a plane as we

d'une droite et d'un plan. Le premier est exactement le même qu'en trois dimensions: leur rencontre est un point, leur jonction génère l'espace tridimensionnel en entier. Le second parallélogramme révèle toutefois une surprise pour un oeil entraîné en trois dimensions! Ici, la rencontre d'une droite et d'un plan est vide, (aucune intersection), leur jonction est l'espace quadridimensionnel en entier. On peut affirmer que dans ce cas la droite et le plan ne se situent pas dans le même espace tridimensionnel, ou qu'ils ne sont pas cospatiaux. On peut également utiliser le terme « gauche » pour décrire leur position relative en quatre dimensions. On doit encore admettre qu'il n'est pas facile d'imaginer une droite qui ne rencontre jamais un plan. Rappelons-nous que nous nous situons dans des espaces projectifs (ici, le pluriel est utilisé adéquatement—pourquoi?) et qu'en trois dimensions une droite et un plan se coupent toujours en un point, même si la droite est parallèle au plan (le point à l'infini est un point ordinaire de l'espace projectif).

Les rencontres de deux plans sont assez intéressantes en quatre dimensions. Si les plans sont cospatiaux (appartiennent au même espace tridimensionnel), leur rencontre est une droite, comme c'était le cas en trois dimensions. Mais, étrangement, s'ils ne sont pas cospatiaux, leur rencontre est un point! Nous suggérons pour visualiser cette scène l'image mentale de deux polygones plans n'appartenant pas au même plan et ayant un sommet commun.

Nous devons discuter d'un autre exemple en quatre dimensions: la rencontre de deux espaces tridimensionnels. En fait, c'est la seule opération à laquelle nous nous référerons lorsque nous examinerons sous peu notre problème tridimensionnel. Toutefois, nous conseillons vivement au lecteur d'étudier l'ensemble des 26 opérations en quatre dimensions données dans le **tableau 2** pour des raisons déjà exprimées plus haut.

L'obstacle visuel probablement le plus difficile à surmonter dans un espace à quatre dimensions est la reconnaissance de la présence simultanée d'un nombre infini d'espaces tridimensionnels. Quelquefois, on appelle aussi un espace tridimensionnel, une cellule, ce qui peut aider le lecteur à se créer une référence visuelle. Nous ferons bientôt appel à la rencontre de deux espaces tridimensionnels. Selon le **tableau 2**, leur rencontre est (toujours) un plan. Afin de se créer une image mentale de cette scène, on la projette sur un espace tridimensionnel: il s'agit d'imaginer deux cubes possédant une face commune.

Le **tableau 2** indique la dimension des éléments (D) et

Table 2

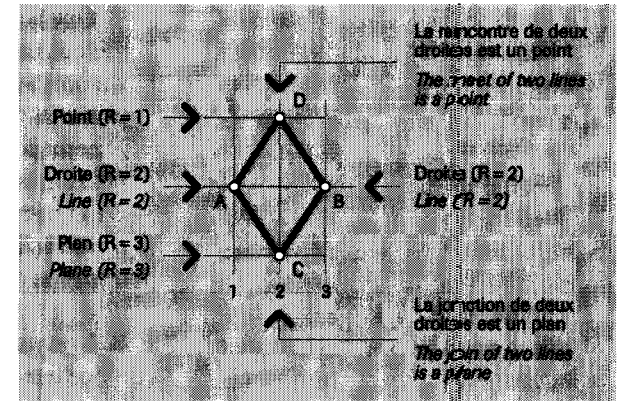
Joins and meets of flats in 2, 3, and 4 dimensions.

Tableau 2

Jonctions et rencontres des variétés en deux, trois et quatre dimensions.

The sum of the ranks of two flats is equal to the sum of the ranks of their meet and their join.
Example in 3-D:

La somme des rangs de deux variétés linéaires projectives est égale à la somme des rangs de leur jonction et de leur rencontre.
Exemple en 3-D:

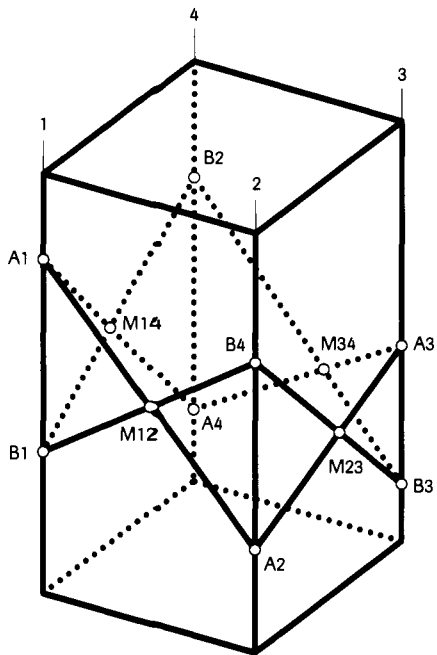


D		R		point, point	point, line	point, plane	point, 3-space	line, line	line, plane	line, 3-space	plane, plane	plane, 3-space	3-space, 3-space
2-D	0	vide • empty											
	0	1 point											
	1	2 droite • line											
	2	3 plan • plane											
3-D	0	vide • empty											
	0	1 point											
	1	2 droite • line											
	2	3 plan • plane											
4-D	0	vide • empty											
	0	1 point											
	1	2 droite • line											
	2	3 plan • plane											
	3	4 espace tridimensionnel • 3-space											
4	5 espace quadridimensionnel • 4-space												

learned before, now we have to look up the meet of this plane with the third 3-space in our Table. The meet of a plane and a 3-space is a line, thus three 3-spaces intersect in a line in 4-D. The reader should verify the following operation: four 3-spaces meet in point.

aussi le rang (R) dans la colonne adjacente, $D + \mathbf{1} = R$. Le rang est un nombre plus pratique (jamais négatif) pour exprimer la formule fondamentale de ces opérations: la somme des rangs de deux variétés linéaires projectives est égale à la somme des rangs de leur jonction et de leur rencontre. Cette

Figure 13
Skew quadrilaterals inscribed on the faces of a prism.
Quadrilatères gauches inscrits sur les faces d'un prisme.



One last comment about **Table 2**. In order to expose all the operations in the diagram in a visually satisfying manner, we omitted all the degenerate cases. For instance a line and a plane in 3-D may take two different relative positions: the general position is depicted with the parallelogram. The other position is when the line lies in the plane. In this case the join is the plane, the meet is the line. This relation can be depicted with a vertical segment instead of a parallelogram, but this type of relations are omitted for the sake of clarity.

6. A return into the 3rd dimension

Since our aim in this Section is to establish the projective links between the 3-space and the 4-space, the readers should hold 3-D models in their hands, rather than staring at 2-D drawings. These models are not difficult to make, and their use would be quite rewarding.

On a prism with a parallelogram base, the parallel edges are 1, 2, 3 and 4 (**Figure 13**). Starting on line 1 with the arbitrarily chosen point A1, draw a line across the face 1.2 of the prism until you meet line 2 in the point A2, continue with the line A2.A3 in the face 2.3, then the line A3.A4 in the face 3.4 and finally return on the face 1.4 to the starting point A1. The quadrilateral A1.A2.A3.A4 is obviously skew (the four points are not coplanar), because every plane section of a prism having a parallelogram base should be a parallelogram also.

Let us draw a second, arbitrary skew quadrilateral B1.B2.B3.B4 starting from the point B1 on the line 1. The two skew quadrilaterals meet in four points M12, M23, M34 and M14 on the four faces of the prism. The surprise is that these four points are always co-planar!

■ The theorem: *The four common points of two skew quadrilaterals inscribed on the faces of a four sided prism (pyramid) are co-planar.*

The theorem applies for pyramids and for prisms of any sort of base as well. We choose the parallelogram based prism for our illustrations, because the constructions on this type of prism are easier to read than the same constructions on a pyramid.

If you hold a model of the prism with strings running across its faces to form the two skew quadrilaterals, a good visual inspection would confirm our statement. Unfortunately, the drawing does not reveal this situation. But we can test the drawing with the following constructions.

règle explique les raisons des constructions vectorielles en parallélogrammes!

Les opérations impliquant plus de deux éléments peuvent facilement être déduites du **tableau 2**. Considérons, par exemple, la rencontre de trois espaces tridimensionnels. Comme nous l'avons appris plus tôt, deux espaces tridimensionnels se coupent en un plan; nous avons maintenant à chercher la rencontre de ce plan avec le troisième espace tridimensionnel dans notre tableau. Or, la rencontre d'un plan et d'un espace tridimensionnel est une droite, d'où trois espaces tridimensionnels se coupent en une droite en quatre dimensions. Le lecteur pourra vérifier l'opération suivante: quatre espaces tridimensionnels se coupent en un point.

Un dernier commentaire au sujet du **tableau 2**. Dans le but de présenter visuellement d'une façon satisfaisante toutes les opérations dans le diagramme, nous avons omis tous les cas dégénérés. Une droite et un plan, par exemple, peuvent prendre deux positions relatives différentes: la position générale est décrite avec le parallélogramme. L'autre position se présente lorsque la droite se situe dans le plan. Dans ce cas, la jonction est le plan, la rencontre est la droite. Cette relation peut être décrite par un segment vertical au lieu d'un parallélogramme, mais on a omis ce type de relation pour des raisons de clarté.

6. Un retour à la troisième dimension

Puisque notre objectif dans cette section est d'établir les liens projectifs entre l'espace tridimensionnel et l'espace quadrimensionnel, les lecteurs devraient tenir des modèles tridimensionnels entre leurs mains plutôt que s'en tenir à des dessins bidimensionnels. Ces modèles ne sont pas difficiles à réaliser et leur utilisation en vaudra la peine.

Sur un prisme de base parallélogramme, les arêtes parallèles sont 1, 2, 3 et 4 (**figure 13**). En débutant en un point arbitraire A1 de la droite 1, on trace une droite sur la face 1.2 du prisme jusqu'à ce qu'on rencontre la droite 2 en un point A2, on continue avec la droite A2.A3 sur la face 2.3, puis avec la droite A3.A4 sur la face 3.4, et finalement, on retourne sur la face 1.4 au point de départ A1. Le quadrilatère A1.A2.A3.A4 est évidemment gauche (les quatre points ne sont pas coplanaires), car toute section plane d'un prisme ayant comme base un parallélogramme doit également être un parallélogramme.

Dessignons un deuxième quadrilatère gauche arbitraire B1.B2.B3.B4 débutant en un point B1 de la droite 1. Les deux quadrilatères gauches se rencontrent en quatre points M12,

Figure 14

The four points appear to be in one plane.

Les quatre points paraissent être sur un plan.

Figure 15

An infinite number of quadrilaterals go through the four points.

Un nombre infini de quadrilatères passent par les quatre points.

Figure 16

Three points determine a unique fourth point.

Trois points déterminent un quatrième point unique.

Figure 17

The special position of the fourth point.

La position spéciale du quatrième point.

In **Figure 14** we show the four points only and we construct the parallelogram passing through the four points. To do so, first we construct the meet of the line M14.M34 with the plane 1.2. We use the method described in connection with **Figure 9**. The point B2 is chosen anywhere on the line 4. The auxiliary plane B1.B2.M34 meets the plane 1.2 in the line passing by the point B1 and parallel to the line B2.M34. This line meets the line M14.M34 in the point P. Join the point B with the point M12 and now you can complete the parallelogram Q1.Q2.Q3.Q4 passing by the four given points. We just executed an affine construction in a single projection, the new system is working in the affine space as well in the projective space.

Constructing this parallelogram is reassuring, but we need a rigorous proof that the four points are indeed in one plane. We could use vector-algebra or elementary geometry, but both proofs are lengthy and awkward.

An elegant proof is nested in 4-space:

A skew quadrilateral in 3-space is the projection of a 3-space from 4-space (a quadrilateral is the join of two skew lines), the meet of two 3-spaces in 4-space is a plane.

M23, M34 et M14 se situant sur les quatre faces du prisme. La surprise réside dans le fait que ces quatre points sont toujours coplanaires!

■ Le théorème : Les quatre points communs de deux quadrilatères gauches inscrits sur les faces d'un prisme à quatre côtés (pyramide) sont coplanaires.

Le théorème s'applique aux pyramides et aux prismes quelle que soit leur base. On a choisi un prisme à base parallélogramme pour nos illustrations parce que les constructions effectuées sur ce type de prisme sont plus simple à lire que les mêmes constructions sur une pyramide.

Si on a entre les mains un modèle du prisme, des cordes parcourant ses faces pour former les deux quadrilatères gauches, un examen visuel attentif devrait confirmer notre énoncé. Malheureusement, le dessin ne révèle pas ce fait. Mais on peut tester le dessin à l'aide des constructions suivantes.

On montre, à la **figure 14**, les quatre points seulement, et on construit le parallélogramme passant par les quatre points. Pour ce faire, on construit tout d'abord la rencontre de la droite M14.M34 avec le plan 1.2. On utilise la méthode décrite à la **figure 9**. Le point B2 est choisi arbitrairement sur la

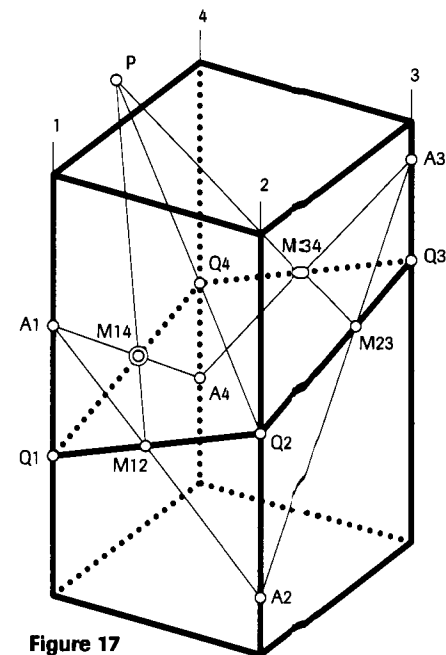
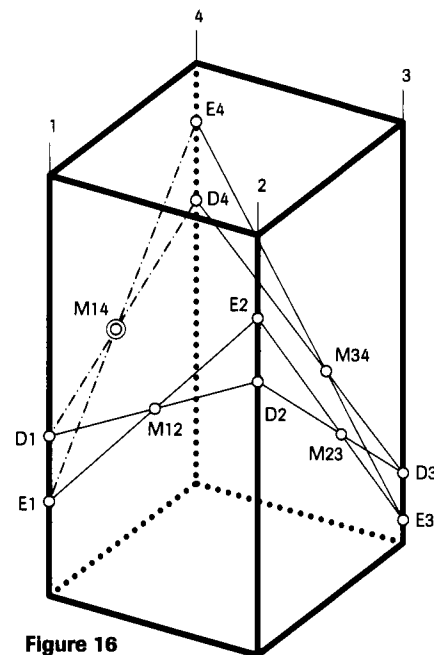
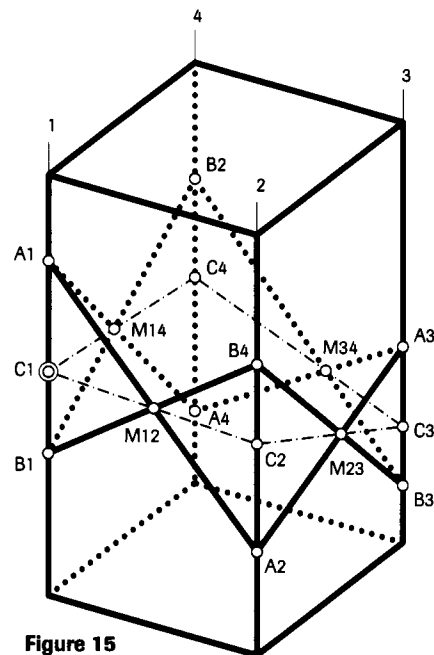
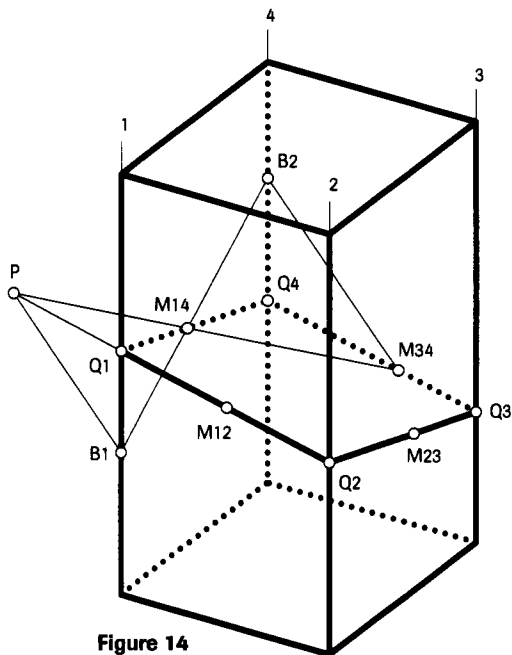


Figure 14

Figure 15

Figure 16

Figure 17

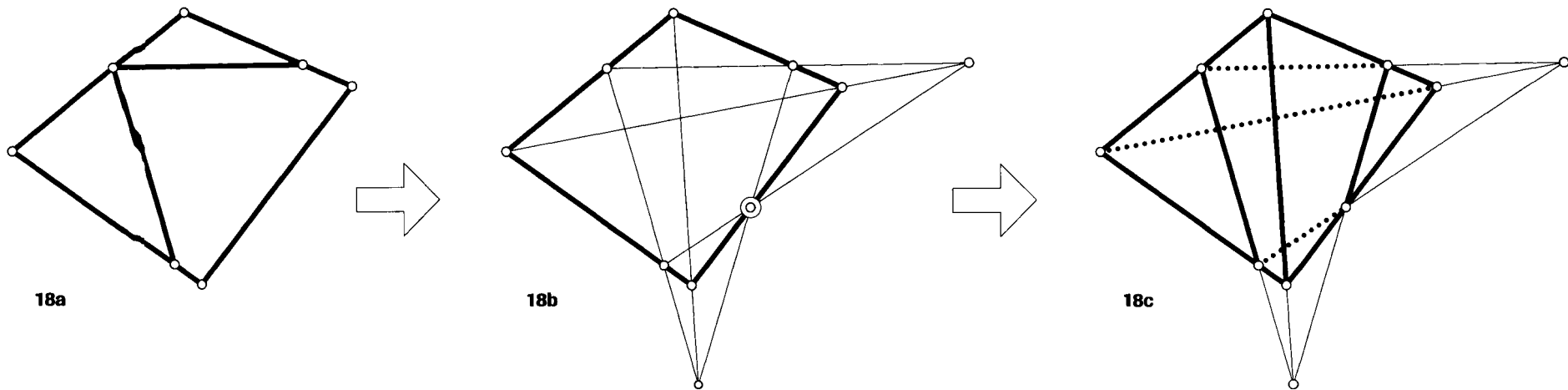


Figure 18
The Desargues configuration.
La configuration de Desargues.

Thus, our model is a 3-D projection of the theorem; the four common points of the two quadrilaterals are in the plane of intersections of two 3-spaces. It is quite fascinating that the geometrical behaviour of a three dimensional model is controlled by an operation projected from four dimension.

We shall mention a few corollaries of the theorem of skew quadrilaterals.

- Corollary #1. *Given the four common points of two skew quadrilaterals inscribed on the faces of a four sided prism (pyramid). An infinite number of skew quadrilaterals are passing through these four points.*

In **Figure 15** we reproduced **Figure 13**, then added the skew quadrilateral C1.C2.C3.C4, passing through the four points. The position of the vertex C1 is anywhere on the line 1. If you draw it yourself, you will be rewarded with a pleasant sensation when the last line joining the vertex C4 and the point M14 will pass through exactly by the arbitrary starting point C1.

- Corollary #2. *Three points installed on three faces of a four sided prism (pyramid) determine uniquely a fourth point in a special position in the plane of the three points, on the fourth face of the prism (pyramid).*

The three points on the prism in **Figure 16** are M12, M23 and M34. From any starting point on line 1 (D1 and E1), draw two skew quadrilaterals by the three points. Their closing edges, D1.D4 and E1.E4 meet in the unique special point M14.

In **Figure 17** we started of with the parallelogram

droite 4. Le plan auxiliaire B1.B2.M34 coupe le plan 1.2 en une droite passant par le point B1 et parallèle à la droite B2.M34. Cette droite coupe la droite M14.M34 au point P. On joint le point B au point M12 et on peut maintenant compléter le parallélogramme Q1.Q2.Q3.Q4 en passant par les quatre points donnés. Il suffit d'exécuter une construction affine dans une seule projection; le nouveau système opère aussi bien dans l'espace affine que dans l'espace projectif.

La construction de ce parallélogramme est rassurante, mais on a besoin d'une preuve rigoureuse du fait que les quatre points sont vraiment dans un même plan. On pourrait utiliser l'algèbre vectorielle ou la géométrie élémentaire, mais ces deux démonstrations demeurent longues et peu élégantes.

Une preuve élégante se niche dans l'espace quadridimensionnel :

Un quadrilatère gauche dans l'espace tridimensionnel est la projection d'un espace tridimensionnel de l'espace quadridimensionnel (un quadrilatère est la jonction de deux droites gauches), la rencontre de deux espaces tridimensionnels dans l'espace quadridimensionnel est un plan.

Ainsi, notre modèle est une projection tridimensionnelle du théorème; les quatre points communs des deux quadrilatères se trouvent dans le plan d'intersection de deux espaces tridimensionnels. Il est assez fascinant de constater que le comportement géométrique d'un modèle tridimensionnel est sous le contrôle d'une opération projetée de l'espace à quatre dimensions.

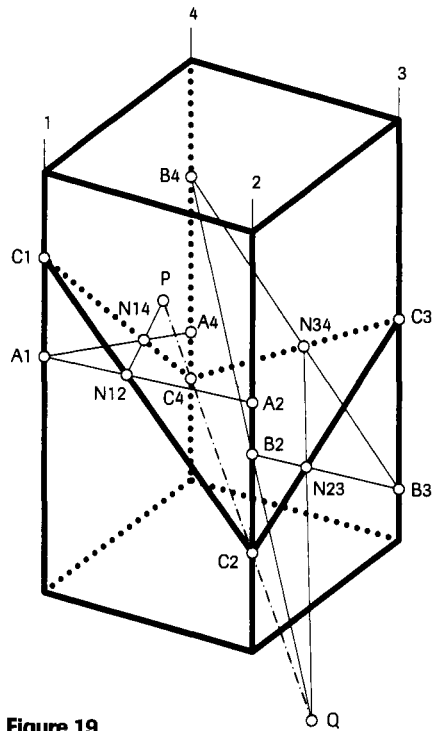


Figure 19
The unique quadrilateral through four points.
Le seul quadrilatère passant par quatre points.

$Q1.Q2.Q3.Q4$, then constructed the four points $M12$, $M23$, $M34$ and $M14$ by intersecting the parallelogram with the skew quadrilateral $A1.A2.A3.A4$. We indicated the special position of the point $M14$ by showing three lines in the plane of the parallelogram, $M12.M14$, $M23.M34$ and $Q2.Q4$, meeting in the point P .

We just passed from four dimension to three dimension in this Section and now we will descend further to two dimension in order to clarify the uniqueness of the fourth point $M14$.

The problem is reduced to a plane problem in **Figure 18**. Chose three points $M12$, $M23$ and $M34$ on the edges of the quadrilateral $Q1.Q2.Q3.Q4$ as shown in **Figure 18a**. To construct the fourth point, find the meet S of the lines $M12.M23$ and $Q2.Q4$. Join S and $M34$, this line meets the edge $Q3.Q4$ in the point $M14$ (**Figure 18b**). This construction is based on the well known Desargues theorem:

If two triangles ($Q1.M12.M23$ and $Q3.M34.M14$) are perspective from a point (R), they are perspective from a line ($Q2.Q4$).

This is one of the oldest and nicest theorem in projective geometry (Coxeter [3]). You may notice an unusual symmetry in the drawing of **Figure 18b**. We can exchange the triangles, the point and line, and the theorem still holds:

If two triangles ($Q2.M23.M34$ and $Q4.M12.M14$) are perspective from a point (S), they are perspective from a line ($Q1.Q3$).

The Desargues theorem is proved in the plane, but it is also a good example to show that a theorem in 2-space is a projection of an operation from 3-space. In **Figure 18c** we invite the reader back to 3-space. Here the quadrilateral $M12.M23.M34.M14$ is a plane section of the tetrahedron $Q1.Q2.Q3.Q4$. The points R and S are the common points of three planes. The point R is the intersection of the planes $Q1.Q2.Q3$, $Q2.Q3.Q4$ and $M12.M23.M34$, the point S is the common point of the planes $Q1.Q2.Q4$, $Q2.Q3.Q4$ and $M12.M23.M34$.

- Corollary #3. *Given four points in general position on the faces of a four sided prism (pyramid). A unique skew quadrilateral is passing through these four points.*

In **Figure 19** we start of with four arbitrarily placed points ($N12$, $N23$, $N34$ and $N14$) on the four faces of the prism. We constructed the piercing point P of the line $N12.N14$ and the diagonal plane 1.2 of the prism as well as the piercing point Q

Nous devons mentionner quelques corollaires du théorème des quadrilatères gauches.

- Corollaire #1. *Étant donnés les quatre points communs de deux quadrilatères gauches inscrits sur les faces d'un prisme à quatre côtés (pyramide), un nombre infini de quadrilatères gauches passent par ces quatre points.*

À la **figure 15**, on a reproduit la **figure 13**, puis ajouté le quadrilatère gauche $C1.C2.C3.C4$ passant par les quatre points. La position du sommet $C1$ sur la droite 1 est arbitraire. Si vous réalisez vous-même le dessin, vous y gagnerez une sensation plaisante lorsque la dernière droite joignant le sommet $C4$ et le point $M14$ passera exactement par le point de départ arbitraire $C1$.

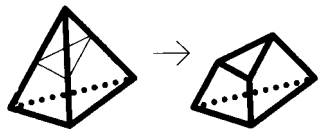
- Corollaire #2. *Trois points situés sur trois faces d'un prisme à quatre côtés (pyramide) déterminent de façon unique un quatrième point dans une position spéciale dans le plan des trois points, sur la quatrième face du prisme (pyramide).*

Les trois points sur le prisme de la **figure 16** sont $M12$, $M23$ et $M34$. D'un quelconque point de départ sur la droite 1 ($D1$ et $E1$), on dessine deux quadrilatères gauches passant par les trois points. Leurs arêtes de clôture, $D1.D4$ et $E1.E4$ se rencontrent à l'unique point spécial $M14$.

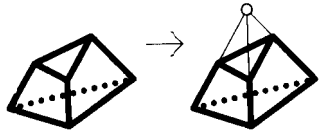
À la **figure 17**, on a débuté avec le parallélogramme $Q1.Q2.Q3.Q4$, puis construit les quatre points $M12$, $M23$, $M34$ et $M14$ par l'intersection du parallélogramme avec le quadrilatère gauche $A1.A2.A3.A4$. On a indiqué la position spéciale du point $M14$ en montrant trois droites dans le plan du parallélogramme, $M12.M14$, $M23.M34$ et $Q2.Q4$, se rencontrant en un point P .

Dans cette section, nous avons effectué le passage de quatre dimensions à trois dimensions et nous descendrons plus loin maintenant vers deux dimensions dans le but de clarifier l'unicité du quatrième point $M14$.

Le problème se réduit à un problème dans le plan à la **figure 18**. On choisit trois points $M12$, $M23$ et $M34$ sur les arêtes du quadrilatère $Q1.Q2.Q3.Q4$, comme illustré à la **figure 18a**. Pour construire le quatrième point, on trouve la rencontre S des droites $M12.M23$ et $Q2.Q4$. On joint S et $M34$; cette droite coupe l'arête $Q3.Q4$ au point $M14$ (**figure 18b**). Cette construction est fondée sur le célèbre théorème de Desargues:



20a



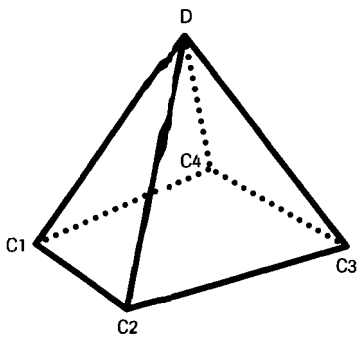
20b

Figure 20

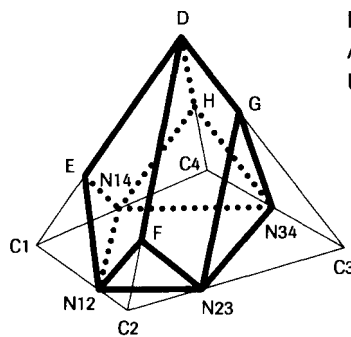
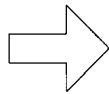
Truncation and pointing.
Troncation et pointage.

of the line $N_{23}.N_{34}$ with the same diagonal plane 1.2. The join of P and Q meets the edges 2 and 4 in the vertices C_2 and C_4 . It is now easy to complete the skew quadrilateral $C_1.C_2.C_3.C_4$. Note that the line PQ is the diagonal of the skew quadrilateral.

We present a "practical" application of the skew quadrilateral theorem. To introduce the problem, we show an operation and its inverse on a polyhedron. In **Figure 20a** a tetrahedron is truncated. In **Figure 20b** we show that starting with a truncated tetrahedron, it is a trivial construction to return to the non truncated tetrahedron. This inverse operation is called "pointing". These types of questions arise often in connection with structural rigidity problems (Crapo [5])



21a



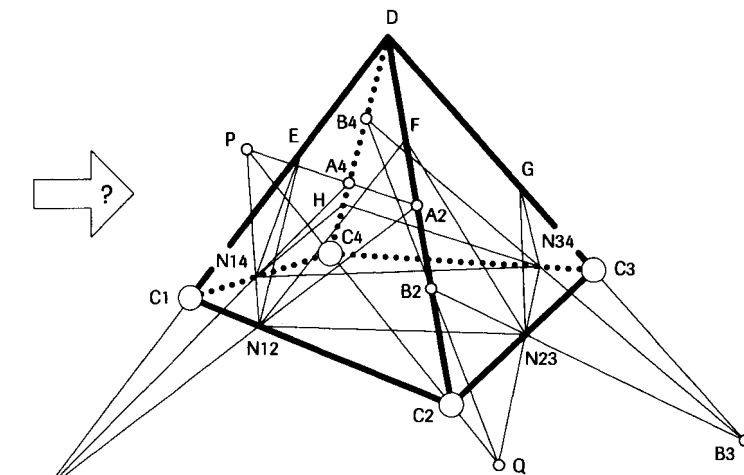
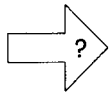
21b

Figure 21

A practical application.
Une application pratique.



21c



21d

Si deux triangles ($Q_1.M_{12}.M_{23}$ et $Q_3.M_{34}.M_{14}$) sont en situation de perspective par rapport à un point (R), ils sont en perspective par rapport à une droite ($Q_2.Q_4$).

C'est l'un des plus vieux et des plus beaux théorèmes de géométrie projective [3]. On peut remarquer une symétrie inhabituelle dans le dessin de la **figure 18b**. On peut intervertir les triangles, le point et la droite et le théorème demeure vrai :

Si deux triangles ($Q_2.M_{23}.M_{34}$ et $Q_4.M_{12}.M_{14}$) sont en situation de perspective par rapport à un point (S), ils sont en perspective par rapport à une droite ($Q_1.Q_3$).

Le théorème de Desargues est démontré dans le plan, mais il représente aussi un bon exemple pour montrer qu'un théorème de l'espace bidimensionnel est une projection d'une opération de l'espace tridimensionnel. À la **figure 18c**, on invite le lecteur à retourner à l'espace tridimensionnel. Ici, le quadrilatère $M_{12}.M_{23}.M_{34}.M_{14}$ est une section plane du tétraèdre $Q_1.Q_2.Q_3.Q_4$. Les points R et S sont les points communs des trois plans. Le point R est l'intersection des plans $Q_1.Q_2.Q_3$, $Q_2.Q_3.Q_4$ et $M_{12}.M_{23}.M_{34}$, le point S est le point commun des plans $Q_1.Q_2.Q_4$, $Q_2.Q_3.Q_4$ et $M_{12}.M_{23}.M_{34}$.

■ Corollaire #3. Étant donnés quatre points en position générale sur les faces d'un prisme à quatre côtés (pyramide), il existe un seul quadrilatère gauche passant par ces quatre points.

À la **figure 19**, on débute avec quatre points arbitraires (N_{12}, N_{23}, N_{34} et N_{14}) placés sur les quatre faces du prisme. On construit le point de percée P de la droite $N_{12}.N_{14}$ et le plan diagonal 1.2 du prisme, aussi bien que le point de percée Q de la droite $N_{23}.N_{34}$ avec le même plan diagonal 1.2. La jonction de P et de Q coupe les arêtes 2 et 4 aux sommets C_2 et C_4 . Il est maintenant facile de compléter le quadrilatère gauche $C_1.C_2.C_3.C_4$. Remarquons que la droite PQ est la diagonale du quadrilatère gauche.

Nous présentons une application « pratique » du théorème du quadrilatère gauche. Pour introduire le problème, on montre une opération et son inverse sur un polyèdre. À la **figure 20a**, un tétraèdre est tronqué. À la **figure 20b**, on montre qu'en débutant avec un tétraèdre tronqué, c'est une opération triviale que de retourner au tétraèdre non tronqué. Cette opération inverse est nommée « pointage ». Ce type de question se présente souvent en lien avec les problèmes de

A similar problem is shown in **Figure 21**. The four sided pyramid in **Figure 21a** is truncated by four planes as indicated in **Figure 21b**, which is a very simple construction.

But, if we draw a truncated pyramid as in **Figure 21c** and ask to point this polyhedron to find the original four sided pyramid, the solution is far from being trivial.

The construction is executed in **Figure 21d**. The multitude of construction lines should neither confuse, or scare the reader: we found the four vertices C1, C2, C3 and C4 the same fashion as in **Figure 19**, see the description there (the labelling is the same in both drawings).

Figure 22 should appear familiar to the reader. Compare it with **Figure 8d**. This is the two dimensional analog of the problem detailed in **Figure 21d**: given four lines meeting in a point and four points placed in the four quadrants, find the quadrilateral whose vertices are on the four lines and its edges are passing through the four points. We know now that they are two possibilities:

1. If the four points are in general position, we have a unique solution,
2. If the four points are in special position, we have an infinite number of solutions.

Evidently, in case #1 the construction is the same as in **Figure 21d**, in case #2 any starting point will result in a closed quadrilateral.

Finally, we mention a few special cases of the two quadrilaterals inscribed on the faces of a prism or a pyramid.

1. The two skew quadrilaterals have a common vertex: there are only three common points between the two quadrilaterals, they determine the common plane.
2. The two skew quadrilaterals have two adjacent, common vertices: the common edge and the only other common point determine the common plane.
3. The two skew quadrilaterals have two non adjacent, common vertices: these are the only common points, the common plane in 3-D is not determined.
4. The two skew quadrilaterals have three common vertices: these vertices determine the common plane.
5. The two skew quadrilaterals have four common vertices: it is the projection of a single 3-space from 4-space.
6. The two quadrilaterals are both plane figures: the four coplanar edges meet in four *colinear* points, which determine the common line of the two plane figures (see **Figure 23**). This correspondence between two figures is called homol-

rigidité structurale [5].

La **figure 21** illustre un problème similaire. La pyramide à quatre côtés de la **figure 21a** est tronquée par quatre plans comme l'indique la **figure 21b**, ce qui est une construction très simple.

Mais, si on dessine une pyramide tronquée comme à la **figure 21c**, et qu'on cherche à pointer ce polyèdre pour trouver la pyramide d'origine à quatre côtés, la solution est loin d'être triviale.

La construction est exécutée à la **figure 21d**. La multitude des droites de construction ne devrait ni confondre, ni effrayer le lecteur: on trouve les quatre sommets C1, C2, C3 et C4 de la même manière qu'à la **figure 19**, où on peut lire la description de cette dernière construction (l'étiquetage est le même dans les deux dessins).

La **figure 22** devrait sembler familière au lecteur. Comparons-la à la **figure 8d**. Il s'agit de l'analogie bidimensionnel du problème détaillé de la **figure 21d**: étant données quatre droites se rencontrant en un point et quatre points placés dans les quatre quadrants, on cherche le quadrilatère dont les sommets se situent sur les quatre droites et dont les arêtes passent par les quatre points. On sait maintenant qu'il y a deux possibilités:

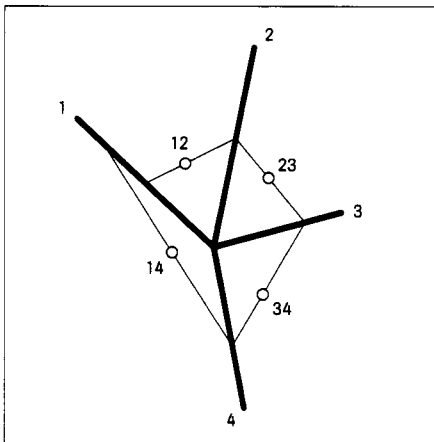
1. Si les quatre points sont en position générale, il y a une solution unique;
2. Si les quatre points sont en position spéciale, il y a un nombre infini de solutions.

Évidemment, dans le cas #1, la construction est la même qu'à la **figure 21d**, dans le cas #2, tout point de départ entraînera un quadrilatère fermé.

Enfin, nous signalons quelques cas spéciaux de paires de quadrilatères inscrits sur les faces d'un prisme ou d'une pyramide.

1. Les deux quadrilatères gauches possèdent un sommet en commun: il n'existe que trois points communs entre les deux quadrilatères, et ils déterminent le plan commun.
2. Les deux quadrilatères gauches possèdent deux sommets adjacents en commun: l'arête commune et le seul autre point commun déterminent le plan commun.
3. Les deux quadrilatères gauches possèdent deux sommets non adjacents en commun: ils constituent les deux seuls points communs, et le plan commun dans l'espace tridimensionnel n'est pas déterminé.
4. Les deux quadrilatères gauches possèdent trois sommets communs: ces sommets déterminent le plan commun.

Figure 22
The analog plane problem.
Le problème plan analogue.



ogy. This can be used to test the planarity of the quadrilaterals: if the base of the prism is not a parallelogram, or we use a pyramid, planarity is not readily recognizable in the projection.

We wanted to show how geometrical properties of figures in three dimensions are controlled by simple rules in two, and four dimensions. We tried to convey the message that we do not live in an isolated universe, dimensions are intricately connected among themselves. Exploring these connections is an important step to understand space.

We hope that have you enjoyed the panorama of many dimensions!

5. Les deux quadrilatères gauches possèdent quatre sommets communs : il s'agit de la projection d'un seul espace tridimensionnel de l'espace quadridimensionnel.
6. Les deux quadrilatères sont deux figures planes : les quatre arêtes coplanaires se coupent en quatre points *colinéaires* qui déterminent la droite commune des deux figures planes (voir **figure 23**). On appelle homologie cette correspondance entre deux figures. On peut utiliser ceci pour tester la planarité des quadrilatères: si la base du prisme n'est pas un parallélogramme, ou si on utilise une pyramide, la planarité n'est pas aisément reconnaissable dans la projection.

On voulait montrer comment les propriétés géométriques de figures en trois dimensions sont contrôlées par des règles simples en deux et en quatre dimensions. Nous avons tenté de transmettre le message suivant : nous ne vivons pas dans un univers isolé, les dimensions sont liées de façon complexe entre elles. L'exploration de ces connexions constitue un pas important vers la compréhension de l'espace.

Nous espérons que vous avez pris plaisir à ce panorama de plusieurs dimensions!

Bibliography / Bibliographie

- [1] Baracs, János (1988). "Spatial Perception and Creativity." In *Shaping space: A Polyhedral Approach* by Senechal and Fleck, Birkhäuser, Boston.
- [2] Baracs, János (1988). "Twelve Exercises on spatial perception." *Structural Topology*, 14, 61-68.
- [3] Coxeter, H. S. M. (1961). *The Real Projective Plane*. Cambridge University Press.
- [4] Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- [5] Crapo, Henry (1979). "Structural Rigidity." *Structural Topology*, 1, 26-45.
- [6] Monge, Gaspard (1795). *Leçons de géométrie descriptive*. Journal des Écoles normales I-IV.
- [7] Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover Publications Inc., New York.

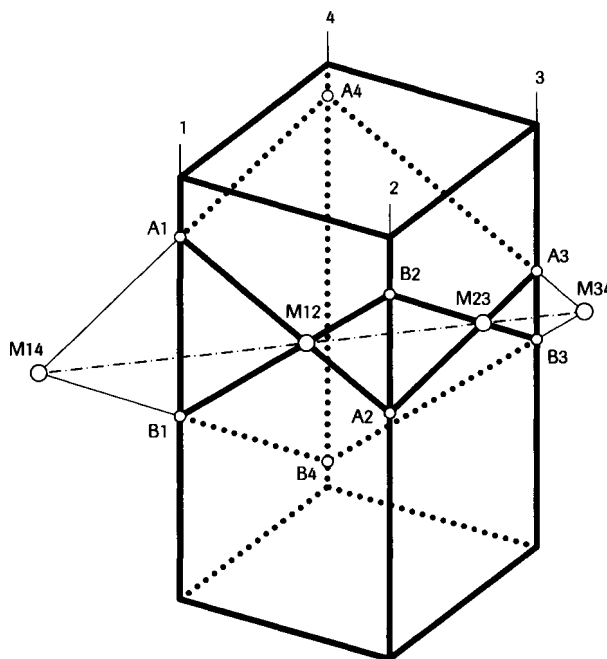


Figure 23

The corresponding edges of two plane figures meet in four colinear points.

Les arêtes correspondantes de deux figures planes se coupent en quatre points colinéaires.