Spatial representation and the teaching of geometry†

Représentation de l'espace et enseignement de la géométrie†

Richard Pallascio, CIRADE, UQAM
Richard Allaire, UQAM
Pierre Mongeau, UQAR
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, succursale A
Montréal (Québec)
H3C 3P8 Canada

Abstract

After a few comments on the teaching of geometry in today's schools, we will outline some of the research results that have guided us in the development of a teaching sequence which is currently at the experimental stage. This sequence of activities, intended for ninth-grade students (14-15 years old), focuses on generating two- and three-dimensional figures, and on exploring their projective properties. The sequence will be demonstrated using symmetrical three-dimensional figures. Initial results have shown that learning activities which include the creative manipulation of three-dimensional objects foster the development of perception and representation abilities in the weakest math students, and that the students who are the weakest on the geometric spatial representation test, make the most progress in mathematics.

Résumé

Après quelques remarques sur l'enseignement actuel de la géométrie dans les écoles, nous exposons quelques résultats d'une recherche qui nous ont guidé dans l'élaboration d'une séquence didactique, actuellement à l'étape de l'expérimentation. Cette séquence d'activités, dont nous présentons un exemple portant sur les volumes symétriques, à l'endroit d'élèves de secondaire III (14–15 ans), priorise la génération de formes et de figures, dans l'exploitation de leurs propriétés projectives. Les premiers résultats font voir, entre autres, que les activités d'apprentissage incluant une manipulation créatrice d'objets géométriques tridimensionnels favorisent le développement des habiletés perceptives et représentatives des élèves les plus faibles en mathématiques et, réciproquement, que ce sont les élèves les plus faibles au test portant sur la représentation spatiale géométrique qui progressent le plus en mathématiques.

† Research funding provided by the *Fonds pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche* (FCAR), government of Québec.

† Les recherches dont il sera question sont réalisées avec l'aide financière du FCAR.

English translation:
Traduction anglaise:
Peter Bottéas

Comments on the teaching of geometry

The *États généraux de l'enseignement des mathématiques au Québec*, a task force on the teaching of mathematics in Québec, adopted a resolution requesting immediate revision of the geometry components of compulsory math courses at the secondary level ([19], p.147–148). But what type of geometry is involved?

At one time, students developed logic thinking primarily through the study of plane geometry, which was followed later by the study of Aristotelian syllogism. Geometry has gradually given way to algebra, in which more mechanical, algorithmic modes of reasoning prevail. In Québec, **logical reasoning** is currently covered at the CEGEP level (17–19 years of age) particularly in philosophy courses.‡ Can nothing be done earlier? Yet are geometry courses a panacea for the development of logical reasoning in students? (For example, consider the following problem: "*True or false*: If a parallelogram has two symmetry axes, it must be a rectangle.") Though today's students know many facts about geometry, they do not seem to know how those facts interrelate, nor are they aware of how they are structured and organized.

Research on learning has demonstrated that **visual aids** (graphics) can be useful to understand mathematical concepts —and that is not limited to geometry [4]. But students must be able to understand the graphic representations we use, and we must be able to teach specific techniques for developing their spatial-representation abilities. What better opportunity to do so than in a mathematics course—the only compulsory subject which formally deals with spatial concepts?

Furthermore, students who have not covered projective geometry or spatial representation, have a great deal of difficulty applying their limited math knowledge to situations in which they have to draw upon their visual/spatial abilities—e.g., in drafting courses at the CEGEP level or architecture courses at university, or when dealing with spatial-representation problems in everyday situations (which are much more common than problems requiring number abilities), such as wide-range travel in a city, mid-range movement through a parking lot or tennis court, or simply when examining projective diagrams in textbooks (with projections that are hopefully correct!).

Students are generally presented with a few ready-made solids (whether polyhedra or other), such as a cube, a parallelepiped prism, or a regular-based pyramid. This, however,

‡ Translator's note: CEGEP refers to the post-secondary, pre-university collegiate level in the Québec educational system.

Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie

Les *États généraux de l'enseignement des mathématiques au Québec* ont voté une résolution demandant la révision prioritaire «du contenu géométrique des programmes de mathématiques du cours obligatoire» ([19], p.147–148), en particulier au secondaire. Mais de quelle(s) géométrie(s) s'agit-il?

Autrefois les élèves formaient leur esprit logique principalement par l'étude de la géométrie plane, puis, plus tard, par l'étude des syllogismes à la manière d'Aristote. Tout doucement, la géométrie a cédé la place à l'algèbre où domine des modes de raisonnement plus mécaniques, plus algorithmiques. Actuellement au Québec, le **raisonnement logique** est étudié et développé au cégep (17–19 ans) particulièrement à l'intérieur des cours de philosophie ! N'y a-t-il rien à faire avant le cégep ? Le cours de géométrie, bien que son but soit de maîtriser l'espace (2D, puis 3D), peut-il servir à développer l'esprit logique de l'élève ? Les élèves d'aujourd'hui connaissent plusieurs faits géométriques, mais ne semblent pas savoir quelles relations établir entre ces faits, tout en ignorant leur structure et leur organisation.

Des recherches sur l'apprentissage ont démontré l'utilité d'avoir recours au **visuel**, à des dessins, pour faire comprendre divers concepts mathématiques, et pas seulement en géométrie [4]. Encore faut-il que les élèves soient en mesure de comprendre les représentations qu'on leur propose, et que l'on puisse leur enseigner certaines techniques spécifiques leur permettant de développer leur représentation spatiale. Et où réaliser cela, si ce n'est au cours de mathématiques, le seul cours obligatoire qui traite formellement de l'espace ?

De plus, en l'absence d'activités scolaires en géométrie projective ou sur la représentation spatiale, les élèves éprouvent beaucoup de difficultés à transférer leurs quelques acquis mathématiques dans des situations où ils auraient à exploiter leurs capacités visuo-spatiales: cours de dessin technique au collégial ou d'architecture à l'université, problèmes de représentation spatiale tirés de la vie courante qui sont beaucoup plus fréquents que les problèmes faisant appel à des habiletés numériques (ex : déplacements macro-spatiaux dans une ville, déplacements méso-spatiaux dans un stationnement ou sur un terrain de tennis...), simple lecture des dessins projectifs dans des manuels scolaires (quand ceux-ci sont corrects projectivement parlant !)...

Les quelques formes géométriques proposées aux élèves goes against the principle of an activity-oriented approach to mathematics that involves authentic problem solving—an approach sometimes used in other areas of mathematics. In general, programs and textbooks, especially at the secondary level, do not reflect a dynamic approach to learning, nor do they use hands-on materials. The problem consists in developing a **generative** approach that uses analogous geometric processes, whether two-dimensional figures *(plane figures)*, three-dimensional figures *(space figures)* or n-dimensional "hyperfigures" are involved. Even the conventional terminology limits the generation of figures (e.g., *solids* rather than *three-dimensional figures* or *space figures*).

Perception and representation of a structural geometric space

Spatial abilities may be the underlying key to mathematical abilities. Research carried out by Bishop [3] led to the hypothesis that mathematical concepts could perhaps be developed not just through the teaching of mathematics, but also through the development of certain basic abilities, including spatial abilities. That hypothesis has not, to the best of our knowledge, been confirmed; however, it could have interesting implications for mathematics learning.

Our research over the last few years may provide a partial answer to Bishop's questions concerning spatial abilities. A study carried out among several hundred subjects of various ages has enabled us to identify certain factors whose significance lies in the foundations of our research method. We developed a new instrument of measure, which has been validated and is geometrically complete, and is designed to assess geometric development in spatial representation [15], [16], [18]. The instrument of measure consists of 40 items, each of which contains two-dimensional geometric representations of three-dimensional objects—either graphs, or central, affine or orthogonal projections. These items are in keeping with the tradition of psychometric spatial-representation tests using paper and pencil. They allow for an assessment of the subjects' performance in various operations that correspond to spatial abilities and various geometric modes.

Our assessment model, which is of the developmental type, was developed in large part on an empirical basis. It very specifically considers spatial abilities in the context of an **essentially geometric** (as opposed to a physical, social, or other) **space**. The matrix of the development of geometric

sont toutes faites: cube, prisme parallélépipédique, pyramide droite à base régulière... Cette approche, où l'élève est passif, va à l'encontre des principes didactiques promouvant une mathématique à faire, par le biais d'une véritable résolution de problèmes. Les programmes et les manuels en général, surtout au secondaire, ne reflètent pas un processus dynamique d'apprentissage et ne font jamais appel à du matériel manipulatoire. Le problème réside dans l'élaboration d'une approche permettant de **générer** par des processus géométriques analogues, autant des figures 2D que des formes 3D (ou des hyperformes nD). Même la terminologie utilisée («solides» au lieu de «formes», par exemple) limite ce travail de génération des formes.

La perception et la représentation d'un espace géométrique structural

Il est possible que l'habileté spatiale soit l'habileté-clé sous-jacente aux habiletés mathématiques. Le travail de synthèse effectué par Bishop [3] l'a amené à intuitionner que les concepts mathématiques pourraient être développés, non seulement par l'enseignement des mathématiques, mais aussi en développant certaines habiletés fondamentales, dont les habiletés spatiales. À notre connaissance, cette hypothèse n'a pas encore été confirmée, bien qu'elle pourrait entraîner des conséquences intéressantes pour l'apprentissage des mathématiques.

Le travail que nous avons effectué ces dernières années peut nous permettre de répondre partiellement au questionnement de Bishop au niveau des habiletés spatiales. Afin d'évaluer le développement géométrique de la représentation spatiale, nous avons élaboré un nouvel instrument de mesure basé sur différents modes géométriques et nous l'avons validé auprès de plusieurs centaines de sujets d'âge varié [15], [16], [18]. Cet instrument comporte 40 items, tous constitués de représentations géométriques bidimensionnelles d'objets tridimensionnels, soit des graphes, soit des projections centrales, affines ou orthogonales. Ce type d'items s'inscrit dans la tradition des tests psychométriques de représentation spatiale de type papier-crayon et permet l'évaluation de la performance des sujets portant sur différentes opérations correspondant à des habiletés spatiales et divers modes géométriques.

Élaboré en bonne partie sur des bases empiriques, notre modèle, de type développemental, tient compte de façon

Habiletés *Abilities*	**Opérations** *Operation*	**Modes géométriques** *Geometric Mode*			
		Topologique *Topological*	Projectif *Projective*	Affine *Affine*	Métrique *Metric*
Relation spatiale *Spatial relationships* (Analytique) *(Analytical)*	**C**lassification ***C**lassifying* **S**tructuration ***S**tructuring*				
	Transposition ***T**ransposing*				
Visualisation spatiale *Spatial visualization* (Opératoire) *(Operational)*	**D**étermination ***D**etermining* **G**énération ***G**enerating*				

Figure 1
Matrix of the development of geometric spatial representation.
Matrice du développement de la représentation spatiale géométrique.

spatial representation (**Figure 1**) takes into account the primary elements of our model. The geometric modes[1] are dealt with according to an axiomatic hierarchy [22]. In addition, we have identified five intellectual operations[2] [1], [17], [15]: *classifying* and *structuring,* which are related to the analytical spatial ability known as "form recognition" (spatial relationships); *determining* and *generating,* which are related to an operational spatial ability, "spatial visualization" (form transformation). The last intellectual operation, *transposing,* seems to be linked to both the analytical and operational factors; it could therefore have an important role as a bridge between the two types of abilities with respect to the development of geometric spatial-representation abilities.

An analysis of test results has enabled us to identify a number of characteristics of the development of spatial abilities according to a typology of geometric modes (see **Figure 1**). Significant improvements in test results become evident in subjects between approximately 10 and 15 years of age. A marked improvement in performance occurs between childhood and adolescence, after which performance stabilizes. Though in a slightly different context, Mariotti's findings [12] are similar. We advance the hypothesis that the age span from 10 to 15 is a favourable time for activities designed to adequately structure students' capacity for spatial representation, as spatial-representation abilities develop naturally and significantly (albeit in a limited way) during that period. We maintain, as do other authors (Baracs [2], Bishop [3], Lean et al. [9], Lunkenbein [11], Mitchelmore [14], Pellegrino et al. [20], Van Hiele [23]), that if no efforts are made to impart certain concepts and properties of geometry, students' men-

très spécifique des habiletés spatiales dans le contexte d'un **espace essentiellement géométrique** (plutôt que physique, social ou autre). La matrice du développement de la représentation spatiale (voir la **figure 1**) rend compte des principaux éléments de notre modèle. Les modes géométriques[1] sont traités selon leur hiérarchie axiomatique [22], alors que nous avons réussi à circonscrire cinq opérations intellectuelles[2] [1], [17], [15]. Deux sont reliées à une habileté spatiale de type analytique, connue dans la littérature sous le vocable «relation spatiale» (ou reconnaissance des formes), à savoir la *classification* et la *structuration.* Deux autres sont reliées à une habileté spatiale de type opératoire, la «visualisation spatiale» (ou transformation des formes): la *détermination* et la *génération.* Une dernière opération intellectuelle, la *transposition,* semble être reliée aux deux facteurs analytique et opératoire, ce qui lui confère un rôle potentiel précieux pour favoriser le passage d'une habileté vers l'autre, eu égard au développement de la représentation spatiale géométrique chez l'individu.

L'analyse des performances des sujets au test spatial permet d'identifier plusieurs caractéristiques du développement des habiletés spatiales, eu égard à une typologie selon les modes géométriques (voir la **figure 1**). Les majorations significatives dans les performances apparaissent entre 10 et 15 ans environ. En effet, la performance des individus s'accroît brusquement entre l'enfance et l'adolescence, puis se stabilise ensuite. Mariotti [12], dans un contexte un peu différent, avait trouvé des résultats semblables. Nous faisons l'hypothèse que cet intervalle d'âge est tout indiqué pour des interventions visant à structurer adéquatement la capacité de représentation spatiale des individus, puisque celle-ci s'y développe alors de façon naturelle et significative, bien que de façon encore modeste. En effet, en accord avec d'autres auteurs (Baracs [2], Bishop [3], Lean et al. [9], Lunkenbein [11], Mitchelmore [14], Pellegrino et al. [20], Van Hiele [23]), nous estimons que sans activités forçant l'acquisition de certaines notions et propriétés géométriques, les images internes élaborées par le sujet peuvent très bien demeurer la vie durant au niveau de ce que Piaget appelle les *groupements infralogiques* [21].

D'autre part, des analyses statistiques indiquent certains parcours privilégiés dans le développement de la représentation spatiale. Ce développement se propagerait de l'**analytique** vers l'**opératoire**, dans le sens des facteurs psychomé-

[1] The ***topological mode*** corresponds primarily to the study of the properties of adjacency and connectedness of spatial structures, which are maintained following one or several continuous transformations, such as extending, contracting, folding and torsion. The ***projective mode*** primarily refers to the study of the properties of incidence of straight lines and planes, which are maintained following a central projection. The ***affine mode*** corresponds primarily to the study of the properties of parallelism and convexity, which are maintained following a parallel projection. The ***metric mode*** corresponds primarily to the study of the properties of distance and angulation.

[1] Le ***mode topologique*** correspond principalement à l'étude des propriétés d'adjacence et de connexité des structures spatiales, lesquelles sont conservées suite à une ou des déformations continues, telles que l'étirement, le rétrécissement, le pliage et la torsion. Le ***mode projectif*** correspond principalement à l'étude des propriétés d'incidence des droites et des plans, lesquelles sont conservées suite à une projection centrale. Le ***mode affine*** correspond principalement à l'étude des propriétés de parallélisme et de convexité, lesquelles sont conservées suite à une projection parallèle. Le ***mode métrique*** correspond principalement à l'étude des propriétés de distance et d'angulation.

tal images will likely never develop beyond the stage that Piaget refers to as *infralogical groupings* [21].

Furthermore, statistics point to certain optimal pathways in the development of spatial-representation abilities. The progression seems to go from the **analytical** to the **operational** in terms of psychometric factors—in other words, from form recognition to form transformation. Spatial ability development seems to begin with the **topological** mode and progress towards the **metric** mode (with a degree of overlapping), according to the model based on the axiomatic hierarchy of geometric properties; however, in an environment which is virtually devoid of representations other than affine and metric, a hiatus may occur at the projective level. Activities that involve crafts or mechanics (low-level activities) seem to be useful for individuals who have inherent difficulties in visualizing three-dimensional forms, whereas activities that require the progressive use of **deductive reasoning** (high-level activities), such as those involved in using geometric parameters to determine the specific elements of a spatial structure, are more pertinent to those who have natural facility, previous experience, or particular interest. This partially answers the question raised by Bishop in 1980 ([3], p.266) concerning the different teaching strategies that can be used with different types of clientele. The development of spatial-representation abilities implies a gradual shift from activities that involve **topological and projective figures** to creating and working with spatial representations through various means (physical, graphic, algebraic and linguistic).

When limited to a **micro-space**[3]—i.e., an environment suited to handling small objects, which can be represented on paper or on a computerized substratum—the concepts that we associate with geometric spatial abilities encompass the following elements: graphs (isomorphic, contiguous, heteromorphic, isotopic, heterotopic, planar, non-planar); intersecting lines; areas; surfaces (right, left); projections (central, parallel); polyhedra (convex, concave, enantiomorphous, truncated, regular, semi-regular, homogeneous, dual); parallelism, symmetry (reflection, rotation, rotary reflection); etc.

As for intellectual mathematical operations, we refer to the main activities of mathematician-geometers with respect to graphs, transformational geometry, and the study of conic sections...—e.g., comparing, discriminating, classifying, constructing, structuring, perceiving invariants, analyzing, synthesizing, representing, and creating models. In doing, so,

triques, allant de la « reconnaissance d'une forme » vers la « transformation d'une forme ». Les habiletés spatiales se développeraient, avec certains chevauchements, du mode **topologique** au mode **métrique**, selon le modèle fondé sur la hiérarchie axiomatique des propriétés géométriques, mais avec un hiatus au niveau projectif, interprété par le contexte culturel qui ne laisse pratiquement de place qu'à des représentations de type affine ou métrique. Des activités impliquant des tâches de **bricolage** et de **mécanique** semblent rentables pour les individus ayant des difficultés « naturelles » à visualiser des formes tridimensionnelles (« low-level »), alors que des activités demandant un recours graduel au **raisonnement déductif** propre à la détermination des éléments définis par des contraintes géométriques sur une structure spatiale (« high-level ») intéressent davantage ceux qui ont soit de la facilité, soit une expérience préalable, soit un intérêt particulier. Cet aspect répond en partie à une question que se posait Bishop en 1980 ([3], p.266), à propos des stratégies pédagogiques différentes à offrir aux différents types de clientèle. Enfin, le développement de la représentation spatiale implique un déplacement graduel d'activités impliquant des **figures topologiques et projectives**, vers la manipulation et la création de représentations spatiales selon divers **médias** (physique, graphique, algébrique, linguistique).

Tout en se limitant au **micro-espace**[3], c'est-à-dire à un environnement privilégiant la manipulation de petits objets et leur représentation sur papier ou sur substrat informatique, les concepts que nous relions aux habiletés spatiales géométriques recouvrent les éléments suivants : les graphes (isomorphes, connexes, hétéromorphes, isotopes, hétérotopes, planaires, non planaires), les lignes incidentes, les régions, les surfaces (droites, gauches), les projections (centrales, parallèles), les polyèdres (convexes, concaves, énantiomorphes, tronqués, réguliers, semi-réguliers, homogènes, duals), le parallélisme, la symétrie (réflexion, rotation, rotation-réflexion)...

Quant aux opérations intellectuelles mathématiques, nous nous référons aux principales activités des mathématiciens-géomètres, activités reliées aux graphes, à la géométrie des transformations, à l'étude des sections coniques... : comparer, discriminer, classifier, construire, structurer, percevoir des invariants, analyser, synthétiser, représenter, créer des modèles... Nous nous limitons par contre aux concepts reliés à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie de

[2] ***Structuring***: the identification of the geometric properties and possible combination of elements in a spatial structure. ***Transposition***: the establishment of correlations and equivalences, and transitions between the various geometric levels and modes of representation. ***Generation***: the production or modification of a spatial structure so that it meets certain predetermined geometric criteria. ***Determination***: the use of geometric boundaries to deduce the elements or parameters of a spatial structure. ***Classification***: the grouping of spatial structures according to specific geometric properties or parameters they have in common.

[2] La ***structuration*** : identifier les propriétés et la combinatoire géométriques d'une structure spatiale ; la ***transposition*** : établir les correspondances, les équivalences, et effectuer le passage entre les différents modes de représentation et niveaux géométriques ; la ***génération*** : produire ou modifier une structure spatiale de façon à ce qu'elle réponde à certains critères géométriques prédéterminés ; la ***détermination*** : délimiter les éléments ou les paramètres définis par des contraintes géométriques sur une structure spatiale ; et la ***classification*** : grouper des structures spatiales selon un choix de propriétés ou paramètres géométriques communs.

[3] As opposed to a meso-space (in which the movement of objects takes place in a visually controlled environment), and a macro-space (involving implicit representation of movements by means of a set of mental "maps."

[3] Par opposition au méso-espace (déplacement d'un objet dans un milieu contrôlé par la vue) et le macro-espace (représentation implicite des mouvements par recollement mental de « cartes »).

however, we limit ourselves to the concepts that pertain to teaching and learning geometry at the secondary level: measurement, angles, distance, area, volume, polygons, lines (bisecting, parallel, perpendicular, and diagonal lines; secants; axes of symmetry), similarity, congruence, reflection, rotation, translation, scaling, isometry, coordinates, planes and polyhedra (prisms, pyramids) (Ministère de l'Éducation du Québec, [13]).

Our goal is to refine the theory while perfecting our pedagogical tools through the development of better tests and more effective teaching materials in order to achieve greater student success in mathematics. "... In mathematics education much more emphasis should be put on various types of plane representations of three-dimensional shapes and relations..." [5].

"Generative" geometry

In the spring of 1991, we developed and pre-tested a "teaching sequence" that includes a conceptual outline (**Figure 1**) of the contents, activity situations, learning activities,[4] application methods, teacher guidelines, and of the results expected from the students in terms of performance and evaluation. The sequence consists of eight sessions of approximately one hour. These sessions are based on various concepts pertaining to the perception of a structural or operative geometric space: intersection and space figures, isometric space figures, projections of space figures, and measurement of space figures.

The pedagogical approach underlying the teaching sequence includes:

- the manipulation and transformation of three-dimensional figures (made materials such as polystyrene);
- reinforced by representations in different media or different types of projections;
- small-group work involving three-dimensional objects;
- the use of figurative and non-figurative stimuli [8], [9];
- problem solving requiring effective perception and representation of geometric space;
- the verbalization and communication of spatial ideas among peers and between student and teacher, including the voluntary refutation of those ideas, which necessarily involves forming more highly developed concepts of spatial representation.

This type of relatively systematic approach, involving

niveau secondaire: mesure, angle, distance, aire, volume, polygone, lignes (bissectrice, parallèle, perpendiculaire, diagonale, sécante, axe de symétrie), similitude, congruence, réflexion, rotation, translation, homothétie, isométrie, coordonnées, plan et polyèdre (prisme, pyramide) (Ministère de l'Éducation du Québec, [13]).

Notre but est de raffiner la théorie, tout en perfectionnant nos outils pédagogiques par l'émergence de meilleurs tests, de matériel didactique plus performant, de procédures et de pratiques éducatives qui feront que les élèves aient plus de succès en mathématiques: «... *in mathematics education much more emphasis should be put on various types of plane representations of three-dimensional shapes and relations...*» [5].

Une géométrie «générative»

Nous avons élaboré et pré-expérimenté au printemps 1991 une «séquence didactique» qui inclut un schème conceptuel (**figure 1**), des savoirs, des situations d'action, des activités d'apprentissage,[4] des modalités d'application et des normes sur les interventions, les productions attendues des élèves et leur évaluation. Le plan des interventions comprend huit rencontres d'environ une heure. Celles-ci sont basées sur différentes notions reliées à la perception d'un espace géométrique structural ou opératoire: les intersections et les volumes, les volumes isométriques, les projections des volumes, et la mesure de volumes.

La pédagogie sous-jacente à la séquence didactique, inclut les composantes suivantes:

- la manipulation et la transformation de formes 3D (formes en polystyrène...) doublées de leurs représentations sous différents médias ou différents types de projections;
- le travail en petits groupes autour d'objets 3D;
- la présence de stimuli figuratifs et non figuratifs [8], [9];
- la résolution de problèmes obligeant une perception et une représentation efficace de l'espace géométrique;
- la verbalisation et la communication des «idées» spatiales entre pairs et avec l'enseignant ou l'enseignante, incluant la réfutation volontaire de ces idées et impliquant une nécessaire structuration de conceptions majorées sur la représentation spatiale.

C'est au prix d'un tel dispositif relativement systématique, à la réalisation duquel auront pris part les enseignantes et enseignants participants, que nous pourrons arriver à mesurer les conséquences d'une telle séquence didactique, en

[4] The learning activities were designed in part by research assistant Dominique Dion.

[4] A participé à la conception de ces activités, Dominique Dion, agent de recherche.

teacher participation, allows for the results of the teaching sequence to be measured in terms of the transfer of a general spatial abilities to more geometric abilities, in terms of prerequisite abilities, and in terms of a more satisfactory means of integrating geometry into the school environment. The actual testing was carried out in 1991.

Activities involving perception and representation abilities were centred on the students' ability to generate two- and three-dimensional shapes using hands-on learning materials. The other operations in our conceptual outline—determining, transposing, structuring and classifying—are presented as secondary to generating. Although seemingly contradictory, as generation is considered a high-level activity, we worked on the premise that students about 15 years of age have acquired intuitive perception through experience, even though they may never have been required to develop their spatial abilities as such. When we administered the perception and spatial-representation tests, the analytical or relational tasks (57.6%) were systematically completed more successfully than the operational or visual tasks (39.4%), which coincides with the operational inadequacies involved in academic programs. Furthermore, in view of the dynamism involved in generating two- and three-dimensional shapes in semi-concrete problem solving (three-dimensional objects and diagrams), it seemed appropriate to use that as a springboard for our other activities (see **Table 1**).

termes de transferts d'une habileté spatiale générale vers une habileté plus géométrique, en termes de préalables de l'une par rapport à l'autre, et en termes d'une institutionnalisation plus satisfaisante du savoir géométrique à l'école. L'expérimentation proprement dite a eu lieu à l'automne 1991.

Sur le plan des habiletés perceptives et représentatives, les activités ont été centrées sur la capacité à générer des figures 2D et des formes 3D, avec l'aide d'un matériel didactique manipulatoire. Les autres opérations de notre schème conceptuel, la détermination, la transposition, la structuration et la classification, se présentent de façon subsidiaire à l'opération consistant à générer. Bien que cela paraisse contradictoire, la génération étant considérée comme une opération de haut niveau, nous avons tablé sur le fait que des élèves d'une quinzaine d'années, même s'ils n'ont jamais vraiment été appelés à développer leurs habiletés spatiales, possèdent une expérience perceptive intuitive. Dans l'administration de nos tests de perception et de représentation spatiale, les tâches analytiques ou relationnelles (57,6 %) sont systématiquement mieux réussies que les tâches opératoires ou visuelles (39,4 %), en concordance avec les lacunes opératoires observées dans les programmes scolaires. De plus, cette opération consistant à générer formes et figures, d'un point de vue didactique, étant donné le dynamisme qu'elle procure dans la résolution de problèmes semi-concrets (objets 3D et dessins), avait intérêt à servir de moteur premier dans nos activités (voir le **tableau 1**).

Table 1 / Tableau 1

Typology of activities in the teaching scenario. (Legend: (operations) G = generating; D = determining; T = transposing; S = structuring; C = classifying; (geometric mode) T = topological; P = projective; A = affine; M = metric.)

Typologie des activités du scénario d'apprentissage. (Légende: (opérations) G: génération; D: détermination; T: transposition; S: structuration; C: classification; (géométries) T: topologique; P: projective; A: affine; M: métrique.)

Activities / Activités	Operation / Opérations	Geometric Mode / Géométries
1. Intersection and space figure / Intersections et volumes	G D T S	T P
2. Isometric space figures / Volumes isométriques		
a) rotation / par rotation	G D T S C	P M
b) reflection / par réflexion	G D T S C	P M
c) rotary reflection / par composée	G D T S C	P M
3. Projections of space figures / Projections de volumes		
a) central / centrales	G D T S C	P
b) parallel / parallèles	G D T S C	A
4. Measuring space figures / Mesures de volumes		
a) Simple polyhedron / Polyèdre le plus simple	G D S	T
b) "Tetrahedrization" of polyhedra / Tétraédrisation des polyèdres	G D T S C	T A M
c) Minimal "Tetrahedrization" / Tétraédrisation minimale	G D T S	T P
d) Trisection of a half cube /Trisection du demi-cube	G D T S C	T P A M
e) Volume of an oblique triangular prism / Volume du prisme triangulaire oblique	G D	A M
f) Volume of an oblique quadrilateral prism / Volume du prisme quadrilatéral oblique	G D	A M
g) Volume of any triangular prism / Volume du prisme triangulaire quelconque	G D	A M
h) Application / Application	G D S C	P M

An example of an activity involving isometric space figures

The objective of this activity is to explore the generation of space figures by means of isometric transformations: rotation, reflection and rotary reflection. At this stage, the teacher's presentation would include the following: an explanation of the distinction between a pair of congruent space figures and a space figure and its reflection image; a description of isometric transformations in space carried out on a rotation axis and on a plane of reflection symmetry; a demonstration of the relationship between the positions of the rotation axis and the plane of reflection symmetry and various other planes (perpendicular, parallel or oblique); and an overview of the possible combinations of various types of symmetry.

The teacher explains to the students how to progress from working with planes that are considered unlimited, as in the first activity (Intersection and space figures), to working with the edges and vertices of space figures in the second activity. The intersecting planes (lines and points) become the *edges* and *vertices* of space figures; the planes are then called *faces.* Thus, the construction sticks and joints used in the activity are the edges and vertices of the figure, and the intersections of infinite planes.

a) Reflection

In this activity, an imaginary plane of reflection, represented by a circular plate of transparent plastic (see **Figure 2**), is used to construct a triangular pyramid characterized by the isometry of a plane reflection.

In theory, the pyramid is constructed as follows. The first plane (ΔABE) intersects the plane of reflection obliquely; the plane of reflection reproduces plane ABE on the other side (ΔABD). The intersection of the resulting dihedron (where two planes meet) is in the plane of reflection (ΔABC). Two other planes (ΔADE and ΔBDE), which are perpendicular to the plane of reflection but cannot be reproduced by that plane, complete pyramid ABDE with intersections that are common to the four planes. In this isometric transformation, all the points of the space figure are reproduced at an equal distance from plane of reflection and are perpendicular to that plane.

Note: ΔABC is in the plane of reflection; ΔADE and ΔBDE are isosceles triangles, but unequal ones (otherwise there would be a second plane of reflection intersecting DE and the centre of AB); ΔADB and ΔBAE are scalene triangles (for

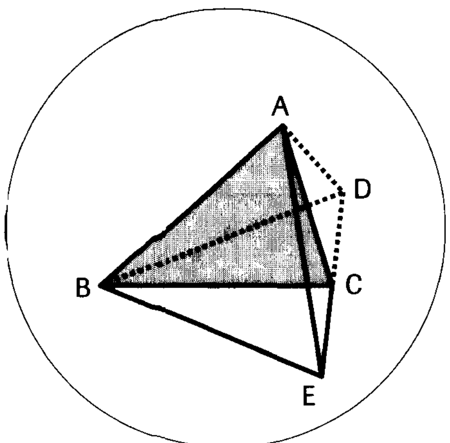

Figure 2
Tetrahedron with a symmetry of reflection.
Tétraèdre composé d'une symétrie de réflexion.

Un exemple d'activité sur les volumes isométriques

L'objectif de cette activité est d'explorer la génération de volumes dans l'espace à partir des transformations isométriques : la rotation, la réflexion et la rotation-réflexion. La présentation de l'enseignant ou de l'enseignante inclut ici des explications sur la distinction entre les formes égales congruentes et énantiomorphes, une description des transformations isométriques dans l'espace, opérées à partir d'un axe de rotation et d'un plan de réflexion, une démonstration des rapports de positions entre ces éléments et un plan quelconque (perpendiculaire, parallèle et oblique), et se termine par un aperçu des combinaisons possibles entre les éléments de symétrie.

On explique aux élèves le passage de la construction avec des plans considérés comme illimités exécutée au cours de l'activité précédente (Intersections et volumes), à la construction à partir des arêtes et des sommets du volume dans la présente activité. En fait, les intersections aux croisements des plans (droites et points) deviennent alors les *arêtes* et les *sommets* du volume et les plans prennent le nom de *faces*. Ainsi les tiges et les noeuds d'assemblage sont à la fois les arêtes et les sommets du volume, à la fois les intersections entre des plans infinis.

a) La réflexion

En utilisant un plan imaginaire, représenté dans cette activité par une plaque circulaire en plastique transparent (voir la **figure 2**), on veut construire une pyramide triangulaire qui possède une isométrie de réflexion.

Théoriquement, un premier plan (ΔABE) croise dans une position oblique le plan de réflexion qui le reproduit une fois de l'autre côté (ΔABD). Le dièdre (ou deux plans qui se rencontrent) ainsi formé a son intersection située dans le plan de réflexion (ΔABC). Deux autres plans (ΔADE et ΔBDE) placés perpendiculairement au plan de réflexion, qui ne peut les doubler dans cette position, complètent la pyramide ABDE par des intersections communes entre les quatre plans. Dans cette transformation isométrique, tous les points de la forme sont reportés perpendiculairement et à égale distance du plan de réflexion.

Note: le ΔABC est dans le plan de symétrie, les ΔADE et ΔBDE sont isocèles, mais inégaux (sans quoi il y aurait un second plan de symétrie passant par DE et le milieu de AB), les ΔADB et ΔBAE sont scalènes (même raison que ci-de-the same reason that ΔADE and ΔBDE are isosceles); BCD and BCE are right angles; and DC = CE.

In practice, triangular pyramids are constructed with sticks and joints (hinges) around the plastic plate, which represents the plane of reflection. The students start by constructing two congruent scalene triangles, with segment AB as a base. Deductively, they determine the last edge of the tetrahedron that joins the two vertices of the two triangles, with C as its median.

The final edge poses an interesting problem: Is the final edge determined uniquely by the beginning of the structure? The tetrahedron which is generated has three different types of triangular faces: two equal scalene triangles and two unequal isosceles triangles.

b) Rotary-reflection

This activity involves constructing a triangular pyramid by means of an isometry which combines a rotation axis with a plane of symmetry.

In theory, a single plane is reproduced three times as the result of reflections combined with successive 90° rotations around the axis. In the diagram of **Figure 3**, axis of symmetry A is perpendicular to plane of symmetry π. A first plane, which we shall call FGH, is oblique in relation to plane of symmetry π and axis of rotation A; a rotation of 90° around axis A (counter-clockwise) and a reflection in plane π will generate plane FGI. This second plane will, in turn, generate plane FHI in the same way. This third plane will then generate plane GHI. The intersection of these four planes results in tetrahedron FGHI. Square BCDE is the intersection of tetrahedron FGHI and plane of symmetry π. The vertices of square BCDE are the centres of edges FG, GH, HI and IF respectively. Axis of symmetry A goes through the centre of edges FH and GI and is perpendicular to them.

In practice, the four vertices of the pyramid, F, G, H and I, can be positioned in the previous diagram (**Figure 3**) in relation to the isometric transformations: F and H are on one side of the plane of symmetry, while G and I are on the other side. Sticks of equal length are used to represent congruent segments FG, FI, HI and HG; the two last edges of the tetrahedron can then be identified: GI and FH. The students are once again asked to draw the different faces of the tetrahedron that has been generated.

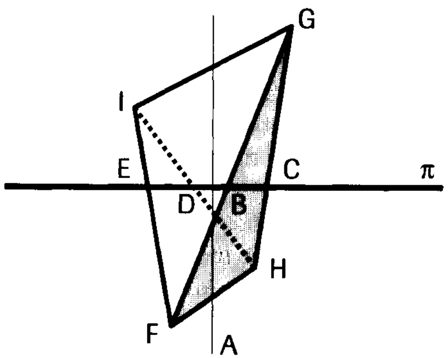

Figure 3
Tetrahedron with a combined symmetry of rotation-reflection.
Tétraèdre composé d'une symétrie composée rotation-réflexion.

vant), les angles BCD et BCE sont droits, DC = CE...

En pratique, on construit la pyramide triangulaire avec des tiges et des noeuds, autour de la plaque transparente, qui représente le plan de réflexion. Les élèves commencent par construire deux triangles scalènes congrus ayant pour base le segment AB. Ils déduisent la dernière arête du tétraèdre qui joint les deux sommets de ces triangles, en ayant C comme point milieu.

Un beau problème de détermination se pose concernant la dernière arête : est-elle déterminée de façon unique par le début de la construction ? Le tétraèdre généré possède cette fois-ci trois types différents de faces triangulaires, à savoir deux triangles scalènes égaux, et deux triangles isocèles inégaux.

b) La rotation-réflexion

A partir de l'élément de symétrie composé d'un axe de rotation combiné à un plan de réflexion, l'idée est toujours de construire une pyramide triangulaire qui possède une isométrie de rotation-réflexion.

Théoriquement, un seul plan est reproduit trois fois après des opérations de réflexion combinées à des rotations successives de 90° autour de l'axe.

L'axe de symétrie A, situé dans le plan du dessin ci-dessous (voir la **figure 3**), est perpendiculaire au plan de symétrie π. Un premier plan, disons FGH, oblique par rapport au plan de symétrie π et l'axe de rotation A, après une rotation de 90° autour de l'axe A (dans le sens trigonométrique ou anti-horaire) et une réflexion par rapport au plan π, génère le plan FGI. Ce second plan, génère à son tour, de la même manière, le plan FHI. Et ce troisième plan génère enfin le plan GHI. L'intersection de ces quatre plans forme le tétraèdre FGHI. Le carré BCDE est l'intersection du tétraèdre FGHI et du plan de symétrie π. Les sommets du carré BCDE sont les milieux des arêtes FG, GH, HI et IF respectivement. L'axe de symétrie A passe par les milieux des arêtes FH et GI et leur est perpendiculaire.

En pratique, on peut positionner à l'aide du croquis de la **figure 3** les quatre sommets F, G, H et I de la pyramide autour des éléments de symétrie : F et H sont d'un côté du plan de réflexion, alors que G et I sont de l'autre côté. On utilise des tiges de longueur égale pour représenter les segments congrus FG, FI, HI et HG, et on peut alors déduire les deux dernières arêtes du tétraèdre, à savoir GI et FH. De nouveau les élèves sont invités à dessiner les différentes faces du tétraèdre généré.

Results

In terms of contents, we deliberately chose to concentrate on projective properties in geometry—an area in which our previous research had shown major shortcomings with respect to topological, affine and metric properties.

Though incomplete, the results obtained thus far have not shown significant changes in the subjects' perception and representation abilities. In standardized tests of perception and spatial abilities that were administered to a test group (30 subjects) and to a control group (25 subjects), the performance of both groups remained unchanged in the perception test and increased in the spatial abilities test.[5] However, the mathematics scores of the students in the test group increased significantly ("t" paired = 2.85, p = 0.01), while the results of the control group remained unchanged.

These results, though not necessarily caused by our activities, are nevertheless in keeping with Bishop's hypothesis [3] that the development of basic abilities other than mathematical abilities (e.g., spatial abilities) can contribute significantly to the improvement of mathematics abilities. The teacher who led the sequence of activities in the pre-test stated the following in her report [6, p.19]: "I find that the students who participated in the activities have developed a number of cognitive abilities. When they encounter a problem, they think of solutions more quickly, and even see that there is more than one way of solving it. They demonstrate better analysis and synthesis abilities. We do not have to follow explanations through to the end—they are now able to finish problems on their own".

Finally, the analysis of the "half split group" enabled us to see that the learning activities that include creative manipulation of three-dimensional geometric objects foster the development of spatial perception and representation abilities in the weakest mathematics students, and that the students who are the weakest on the geometric spatial representation test, make the most progress in mathematics (**Table 2**).

Quelques résultats

Au niveau des contenus géométriques, nous avons choisi volontairement d'accentuer le travail sur les propriétés projectives, où nos précédentes investigations nous avaient indiqué de graves lacunes, par rapport aux propriétés topologiques, affines et métriques.

Les résultats partiels dont nous disposons ne nous permettent pas de mettre en évidence des changements significatifs au niveau des habiletés perceptives et représentatives des sujets. En effet, aux tests standardisés[5] d'habiletés spatiales et de perception que nous avons fait passé au groupe expérimental (30 sujets) et à un groupe contrôle (25 sujets), les performances sont soit restées stationnaires dans les deux groupes (test de perception), soit ont augmentées dans les deux groupes (test d'habiletés spatiales). Par contre les résultats scolaires en mathématiques des élèves du groupe expérimental se sont améliorés de façon significative (« t » pairé = 2,85, p = 0,01), alors que ceux du groupe contrôle sont demeurés stationnaires.

Ces résultats, même si l'influence de nos interventions n'est pas démontrée, vont malgré tout dans le sens de l'hypothèse de Bishop [3], à l'effet que le développement d'habiletés fondamentales autres que mathématiques, comme les habiletés spatiales, peuvent contribuer significativement à l'amélioration des compétences mathématiques. L'enseignante qui animait la séquence d'activités pendant la pré-expérimentation mentionne d'ailleurs dans son rapport [6, p.19]:
« Je trouve que les élèves ayant participé à l'activité ont développé plusieurs habiletés cognitives. Lorsqu'ils rencontrent un problème, ils pensent plus rapidement à des solutions et même, voient qu'il y a plus d'une façon de le solutionner. Ils font état d'une meilleure analyse et d'une meilleure synthèse. On n'a pas besoin d'aller jusqu'au bout d'une explication, ils sont maintenant en mesure de finir le reste du problème par eux-mêmes. »

Enfin une analyse dichotomique (« *half split group* ») nous fait voir que les activités d'apprentissage incluant une manipulation créatrice d'objets géométriques tridimensionnels favorisent le développement des habiletés perceptives et représentatives des élèves les plus faibles en mathématiques et, réciproquement, que ce sont les élèves les plus faibles au test portant sur la représentation spatiale géométrique qui progressent le plus en mathématiques (**Tableau 2**).

[5] Sub-tests from the *General Aptitude Test Battery* (GATB, form B, 1002 B), Institute of Psychological Research, Montréal.

[5] Sous-tests de la Batterie Générale de Test d'Aptitude (GATB, formule B-1002 B), Institut de Recherches Psychologiques de Montréal.

Conclusion

We have observed problems in current programs, practices that contradict to a large extent the problem-solving approach, and a failure to transfer mathematical abilities to geometry in situations where visual/spatial abilities are required. We do not have a cure-all formula, but it seems that transformational geometry can be redefined through a generative approach to plane and space figures, based on isometric transformations. Such an approach allows for the mastery of various types of projections, as well as spatial abilities and the corresponding mental operations.

"The most effective mental images are geometric images: the classic images of plane geometry—triangles and circles—with their unlimited wealth of properties; the basic images of space geometry—cubes and spheres; isometry—the displacement and transformation of geometric figures; and similarities that allow for changes in scale to be translated into a sort of 'intellectual close-up'." [7, p.33]

Conclusion

Nous avons constaté des difficultés dans la prestation des programmes actuels et observé la pratique de processus qui vont à l'encontre en bonne partie d'une approche par résolution de problèmes ; nous avons aussi noté l'absence de transfert des acquis mathématiques en géométrie dans des situations où les habiletés visuo-spatiales sont sollicitées. Nous n'avons pas de recette miracle, mais il nous semble que nous pouvons réarticuler la géométrie des transformations en facilitant une étude générative des figures et des formes fondée sur les transformations isométriques, permettant de maîtriser les différents types de projection, de même que les habiletés spatiales et les opérations mentales correspondantes.

« Les images mentales les plus efficaces sont les images géométriques: les images classiques de la géométrie plane, les triangles, les cercles, avec l'infinie richesse de leurs propriétés; les images de base de la géométrie de l'espace, le cube, la sphère ; les symétries, les déplacements et les transformations de ces figures ; les similitudes qui permettent de traduire les changements d'échelle en une sorte de zoom intellectuel. » [7, p.33]

Table 2 / Tableau 2

Results of the paired (two headed) student "t" test, comparing the results at the test on geometric spatial representation (GSR) before and after the experimentation, for weak and strong students in mathematics, and comparing the results in mathematics before and after the experimentation, of the weak and strong students in GSR.

Résultats du test t de Student pairé à 2 têtes, comparant les résultats au test de la représentation spatiale géométrique (RSG) avant et après l'expérimentation, des élèves faibles et des élèves forts en mathématiques, et comparant les résultats en mathématiques avant et après l'expérimentation, des élèves faibles et des élèves forts en RSG.

	t_{paired} / $t_{pairé}$	p
Weak in math / Faibles en maths	2,52	0,03
Strong in math / Forts en maths	0,38	0,71
Weak in GSR / Faibles en RSG	2,09	0,06
Strong in GSR / Forts en RSG	1,26	0,23

Bibliography / Bibliographie

[1] Baracs, J. et al. (1983). "Vers une définition opératoire de la perception spatiale." In *Les Actes de la 5e rencontre du PME-NA*, I, 314-321.

[2] Baracs, J. (1988). "Spatial Perception and Creativity." In *Shaping Space: A Polyhedral Approach.* Senechal, M. & Fleck, J. (éd.), Birkhäuser, 118-132.

[3] Bishop, Allen J. (1980). "Spatial Abilities and Mathematics Education—A Review." *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.

[4] Eisenberg, T., Dreyfus, T. (1989). "Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum." In *Focus on Learning Problems in Mathematics*, II-1, 1-5.

[5] Gaulin, Claude (1985). "The Need for Emphasizing Various Graphical Representations of 3-dimensional Shapes and Relations." In L. Streefland (ed.), *Proceedings of 9th PME*, II, 53-71.

[6] Gauthier, Christine (1991). *Rapport de la pré-expérimentation* , UQAM, inédit (unpublished), 28 p.

[7] Kahane, Jean-pierre (1990). "L'enseignement des mathématiques à l'approche de l'an 2000." In *Mathématiquement vôtre! Défis et perspectives pour l'enseignement des mathématiques.* (R. Pallascio, dir.), Éd. Agence d'Arc, 25-44.

[8] Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.* Univ. of Chicago Press.

[9] Lean, G.A., Clements, M.A. (1981). "Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance." *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267-299.

[10] Lugon, S. (1990). "Une activité de recherche dans l'espace." In *Math École*, Sept., 2-10.

[11] Lunkenbein, Dieter (1983). "Observations concerning the Child's Concept of Space and its Consequences for the Teaching of Geometry to Younger Children." In *Proceedings of the ICME-IV*, Birkhäuser, 172-174.

[12] Mariotti, M.A. (1989). "Mental Images: Some Problems Related to the Development of Solids." *Les Actes de PME-XIII* , Paris, 2, 258-265.

[13] Ministère de l'Éducation du Québec (1982). *Programmes d'études: Secondaire, Mathématique, premier et second cycle.* DGDP.

[14] Mitchelmore, M.C. (1983). "The Development of Children's Spatial Ideas." In *Proceedings of the ICME-IV*, Birkhäuser, 171-172.

[15] Mongeau, Pierre (1990). *Analyse et évaluation géométrique et psychologique de la représentation spatiale et de son développement.* Thèse de doctorat inédite (doctoral dissertation, unpublished), Univ. de Montréal, 216 p.

[16] Mongeau, P., Pallascio, R. et Allaire, R. (1991). *El desarrollo geométrico de la representracion espacial.* Suma, Valence, Espagne, juillet (July), 7, 5-12.

[17] Pallascio, R. et al. (1985). *Identification des facteurs composant l'habileté à percevoir l'espace et de moyens permettant de la développer.* Rapport au FCAR (Report submitted to the FCAR) #84AR0006.

[18] Pallascio, R. Allaire, R. et Mongeau, P. (1989). *Vers un modèle didactique.* Rapport de recherche au FCAR (Research report submitted to the FCAR), #3046.

[19] Pallascio, R. (dir.) (1990). *Mathématiquement vôtre! Défis et perspectives pour l'enseignement des mathématiques.* Ed. Agence D'Arc, 235 p.

[20] Pellegrino, J.W., Alderton, D.L., Shute V.J. (1984). "Understanding Spatial Ability." In *Educational Psychology*, 19(3), 239-253.

[21] Piaget, J., Inhelder, B. (1947). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* PUF.

[22] Robinson, E. (1976). "Mathematical Foundations of the Development of Spatial and Geometrical Concepts." In J.L. Martin (éd) *Space and Geometry*, Eric/Smeac, 7-29.

[23] Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight.* Academic Press.