

# Análisis y Diseño de Sistemas Lineales con Parámetros Variantes Utilizando LMIs

Damiano Rotondo<sup>a,b</sup>, Helem S. Sánchez<sup>a,c</sup>, Fatiha Nejari<sup>a,c</sup>, Vicenç Puig<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup>Centro de Investigación en Supervisión, Seguridad y Control Automático (CS2AC), Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), 08022 Terrassa, España.

<sup>b</sup>Institut de Robòtica i Informàtica Industrial, CSIC-UPC, Llorens i Artigas 4-6, 08028 Barcelona, España.

<sup>c</sup>Departamento de Ingeniería de Sistemas, Automática e Informática Industrial (ESAI), Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), 08022, Terrassa, España.

---

## Abstract

En este artículo se presenta un tutorial sobre análisis y diseño de sistemas lineales con parámetros variantes (LPV) utilizando las desigualdades lineales matriciales (LMIs). Varias especificaciones, tales como la  $\mathcal{D}$ -estabilidad, el desempeño  $\mathcal{H}_\infty$  garantizado y el coste cuadrático garantizado, así como también diferentes estructuras de control, tales como el control por realimentación de estado, el control por realimentación de salida y el control basado en observador, han sido consideradas. Para ilustrar de forma didáctica el desarrollo completo del diseño mediante LMIs, se utilizan un ejemplo numérico y un modelo simplificado de un helicóptero de dos grados de libertad (TRMS).

**Keywords:** Sistemas lineales, análisis de estabilidad, análisis de prestaciones, desigualdades matriciales lineales (LMIs), sistemas lineales de parámetros variantes (LPV).

---

## 1. Introducción

En las últimas décadas, las desigualdades lineales matriciales (LMIs, del inglés *Linear Matrix Inequality*) han atraído un creciente interés por parte de la comunidad investigadora debido a la posibilidad de usarlas para expresar una amplia variedad de problemas que surgen en la teoría de sistemas y de control (Boyd et al., 1994). Una LMI es una desigualdad matricial que es lineal en sus variables, generalmente expresada como:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i < 0 \quad (1)$$

donde  $F_i, i = 1, \dots, n$ , son matrices simétricas conocidas, mientras que  $x_i, i = 1, \dots, n$ , son escalares desconocidos a los que se hace referencia como *variables de decisión*. La solución de la LMI (1) requiere que  $F(x)$  sea una matriz definida negativa, es decir, que todos sus valores propios sean negativos.

La importancia de las LMIs se debe a que, en las últimas décadas, una gran variedad de problemas de análisis y diseño de sistemas de control han sido formulados a través de ellas. El éxito de este enfoque nace de la disponibilidad de muchos solucionadores para resolver LMIs. Entre los más populares se encuentran: LMILAB (Gahinet and Nemirovskii, 1993), SeDuMi (Sturm, 1999) y SDPT3 (Toh et al., 1999). Estos solucionadores están basados en algoritmos de optimización, como por ejemplo el algoritmo del elipsoide (Fernández and Ruiz, 1991) o el algoritmo del punto interior (Nesterov and Nemirovskii, 1994).

Desde el año 2000, la cantidad de artículos publicados acerca de LMIs ha aumentado de manera impresionante, de forma tal que (Duan and Yu, 2013) han definido el siglo XXI como el *período floreciente* de las LMIs. Varios libros han aparecido sobre este tema, presentando métodos avanzados de LMI en control (El Ghaoui and Niculescu, 2000), control y estimación multivariable (Ostertag, 2011), control de superficie dinámica

de sistemas no lineales con incertidumbres (Song and Hedrick, 2011) y control estocástico (Guo and Wang, 2010), entre otros.

El éxito reciente de los sistemas de parámetros variantes (LPV, del inglés *Linear Parameter Varying*) está estrechamente relacionado con el éxito del análisis y diseño basados en LMI (Rotondo, 2017). Los sistemas LPV fueron introducidos por (Shamma, 1988) para distinguir tales sistemas de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI, del inglés *Linear Time Invariant*) y de los sistemas lineales y variantes en el tiempo (LTV, del inglés *Linear Time Varying*). Más específicamente, los sistemas LPV son una clase particular de sistemas LTV, donde los elementos variables en el tiempo dependen de parámetros medidos que pueden variar a lo largo del tiempo (White et al., 2013). El paradigma de los sistemas LPV ha evolucionado rápidamente en las últimas dos décadas y se ha aplicado con éxito a un gran número de aplicaciones, como por ejemplo a sistemas de seguimiento visual (Sznaier and Mazzaro, 2003), bicicletas sin conductor (Brizuela-Mendoza et al., 2016), suspensiones automotrices (Tudon-Martinez et al., 2016), biorreactores (López-Estrada et al., 2015) y robots móviles (Rotondo et al., 2015c).

Sin embargo, más allá de su utilización en el diseño de nuevas técnicas de control, el uso de las LMIs en el contexto de diseño de controladores convencionales y su introducción en cursos de control a nivel académico aún no se ha extendido suficientemente. Una de las razones principales puede ser que no existe aún texto alguno de tipo tutorial que permita a los estudiantes comprender, de forma sencilla, la importancia y la utilidad de las LMIs como herramienta para el diseño de controladores.

El objetivo de este trabajo es presentar un tutorial que muestra como, mediante las LMIs, es posible analizar y diseñar sistemas LPV. Este material se podría utilizar en cursos de control en espacio de estado y cursos de control no lineal para introdu-

cir la visión moderna del control de planificación de ganancia.

La estructura del artículo es la siguiente: la Sección 2 introduce el modelado de sistemas LPV. El análisis y el control de sistemas LPV basados en LMI se presentan en las Secciones 3 y 4, respectivamente. La Sección 5 ilustra de manera didáctica el desarrollo completo del diseño mediante LMIs, aplicado a un modelo simplificado de helicóptero de dos grados de libertad (TRMS). Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

## 2. Modelado de sistemas LPV

En esta sección, se presenta una introducción al modelado de sistemas lineales con parámetros variantes. Por simplicidad, en este tutorial se considerará solamente el caso de modelos en espacio de estado con dependencia de parámetros politópica, aunque es importante mencionar la existencia de una amplia literatura sobre sistemas LPV representados a través de una transformación lineal fraccional (LFT, del inglés *Linear Fractional Transformation*) y modelos LPV entrada-salida, véase por ejemplo (Scherer, 2001; Wu and Dong, 2006; Ali et al., 2010).

Los sistemas LPV son una generalización de los sistemas LTV, cuyas matrices en espacio de estado son funciones fijas de algunos parámetros variables  $\theta(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$  que, aunque desconocidos a priori, se pueden medir o estimar en tiempo real<sup>1</sup>:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \quad (3)$$

Los sistemas LPV establecen un paradigma intermedio entre las dinámicas lineales y no lineales, por lo que se han convertido en un paradigma alternativo para el control de procesos no lineales (Shamma, 2012).

Entre los enfoques de análisis y diseño disponibles, el más popular (al menos teniendo en cuenta el número de publicaciones) es el enfoque politópico (Hoffmann and Werner, 2015), que tiene fuertes analogías con los sistemas de lógica borrosa Takagi-Sugeno (TS) (Takagi and Sugeno, 1993; Sala and Ariño, 2009; Bernal and Guerra, 2010; Andújar and Barragán, 2014; Barragán et al., 2015; Villafuerte and Melo, 2015; Guerra et al., 2015; Rotondo et al., 2015d, 2016). La representación politópica de un sistema LPV consiste en definir funciones de ponderación que permitan obtener las matrices del sistema como suma ponderada de sistemas definidos en los vértices del politopo, resultando en la representación:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \quad (5)$$

donde los cuartetos  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  definen los *sistemas vértice*, y  $\mu_i$  son los coeficientes de la descomposición politópica, que cumplen con las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) = 1, \quad \mu_i(\theta(t)) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \theta \in \Theta \quad (6)$$

Hay varias técnicas que permiten obtener una representación *quasi-LPV* (2)-(3) equivalente a un sistema no lineal, donde el *quasi* se refiere a que los parámetros variables  $\theta$  son funciones de señales endógenas, como el estado o las entradas del sistema. Una de las técnicas más utilizadas es la incrustación no lineal (Kwiatkowski et al., 2006), conocida como técnica de la no-linealidad sectorial en la literatura de TS (Tanaka and Wang, 2001), para la cual, a continuación, se proporciona un ejemplo.

Consideremos el sistema no lineal:

$$\dot{x}_1(t) = \sin(x_1(t)) + x_1(t)x_2(t) + u(t) \quad (7)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) \quad (8)$$

que, al definir  $\theta_1(t) = \sin(x_1(t))/x_1(t)$ ,  $\theta_2(t) = x_1(t)$  y  $\theta_3(t) = x_2(t)$ , puede ser reescrito en la representación *quasi-LPV* equivalente:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) & \theta_2(t) \\ \theta_2(t) & \theta_3(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (9)$$

Obsérvese que (9) no es la única representación *quasi-LPV* posible para (7)-(8). Por ejemplo, definiendo  $\theta_1(t) = x_1(t) + \sin(x_1(t))/x_2(t)$  y  $\theta_2(t) = x_1^2(t)/x_2(t) + x_2(t)$ , se obtiene:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1(t) \\ 0 & \theta_2(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (10)$$

Sin embargo, hay dos inconvenientes en la representación (10): su no controlabilidad y el hecho que  $\theta_1, \theta_2 \rightarrow \infty$  cuando  $x_2 \rightarrow 0$ . Debido a esto, es importante conocer si una representación *quasi-LPV* es controlable (o detectable). Recientemente, este tema ha tenido mucho interés, véase por ejemplo (Witczak et al., 2015, 2017), en los cuales se han obtenido condiciones necesarias y suficientes para analizar la alcanzabilidad y observabilidad de sistemas en tiempo discreto con representación politópica.

La técnica de la incrustación no lineal se puede aplicar a todas las funciones no lineales de clase  $C^1$ , y tiene la ventaja de proporcionar una representación LPV del todo equivalente al sistema no lineal de origen. Sin embargo, al utilizar esta técnica, el número de parámetros variantes explota de forma exponencial al aumentar del número de no linealidades (Sala, 2009). Hay trabajos que intentan poner remedio al problema de la dimensionalidad, entre los cuales cabe recordar el método propuesto por (Kwiatkowski and Werner, 2008), basado en el análisis de componentes principales aplicado a trayectorias típicas de los parámetros variantes.

<sup>1</sup>Para el caso en que las funciones no sean fijas da lugar a los sistemas LPV conmutados (Lu and Wu, 2004). Por otra parte, si los parámetros no se pueden medir o estimar, los sistemas LPV se reducen al caso de sistemas con incertidumbre variante en el tiempo (Zhou and Khargonekar, 1988).

### 3. Análisis de sistemas LPV basado en LMIs

En esta sección, se van a presentar algunos conceptos básicos de la utilización de las LMIs para el análisis de sistemas LPV. Estos conceptos se derivan de la teoría de Lyapunov, que para un sistema autónomo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (11)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  es el estado y  $f$  denota una función no lineal, establece que es asintóticamente estable (en otras palabras, todas sus trayectorias convergen al origen del espacio de estado) si y solo si existe una función de  $x(t)$ , denominada *función de Lyapunov*,  $V(x)$  tal que  $V(0) = 0$  y  $\forall x \in \mathbb{R}^{n_x} \setminus \{0\}$ :

$$V(x) > 0 \quad (12)$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (13)$$

Es fácil comprobar que, para un sistema autónomo LTI:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (14)$$

si se elige una función de Lyapunov cuadrática  $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ , con  $P$  matriz simétrica, las condiciones (12)-(13) pueden expresarse como las siguientes LMIs<sup>2</sup>:

$$P > 0 \quad (15)$$

$$A^T P + PA < 0 \quad (16)$$

Al emplear la misma función de Lyapunov para un sistema autónomo LPV:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) \quad \theta(t) \in \Theta \quad (17)$$

la condición de estabilidad cuadrática lleva a:

$$A(\theta)^T P + PA(\theta) < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (18)$$

Sin embargo, (18) corresponde a la satisfacción de un número infinito de condiciones, lo que conlleva un problema computacional. La forma más común de abordar este problema es utilizar el enfoque politópico, de modo que si  $A(\theta(t))$  en (17) se puede expresar tal que:

$$A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) A_i \quad (19)$$

con los coeficientes  $\mu_i(\theta(t))$  que cumplen (6), entonces una condición suficiente para (18) es que:

$$A_i^T P + PA_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (20)$$

Dicho resultado se logra aprovechando una propiedad básica de las matrices (Horn et al., 1990), que establece que cualquier combinación lineal de (20) con coeficientes no negativos, de los cuales al menos uno sea diferente de cero, es definida

negativa. Por lo tanto, utilizando los coeficientes  $\mu_i(\theta(t))$ , y teniendo en cuenta (19), se obtiene (18).

El conjunto de LMIs (20), aunque proporciona unas condiciones atractivas para la computación de la matriz  $P$ , introduce conservadurismo ya que (20) es del todo equivalente a (18) (o sea, además de ser una condición suficiente es también necesaria), solo cuando el conjunto de posibles valores de  $A(\theta(t))$  expresado por (19) coincide con el conjunto de valores de  $A(\theta(t))$  obtenido al variar  $\theta(t)$  en  $\Theta$ , que no es el caso en muchas aplicaciones.

Es importante remarcar que el enfoque basado en LMIs es un caso particular del análisis basado en la suma de cuadrados (SOS, del inglés *Sum-Of-Squares*), que trata de encontrar una descomposición adecuada de las variables de decisión para verificar la positividad de polinomios dados (Prajna et al., 2004; Wu and Prajna, 2005; Gordillo Álvarez, 2009; Pitarch et al., 2014). Aunque sea computacionalmente atractivo y conduce a soluciones precisas, la complejidad de este enfoque ha obstaculizado su difusión, y hoy en día su aplicación continua restringida a casos específicos, como el análisis de sistemas LPV con parámetros constantes a trozos (Briat, 2015).

Es de interés señalar que siempre es posible utilizar un método numérico basado en discretizar  $\Theta$  y evaluar (18) en los puntos de una rejilla, reduciendo el número de condiciones de infinito a finito (Wu et al., 1996). Sin embargo, este método solo proporciona un análisis aproximado, ya que no se pueden extraer conclusiones teóricas para valores de  $\theta$  diferentes de los considerados en el mallaado.

Además, es preciso recordar que en el caso de sistemas quasi-LPV generados a partir de sistemas no lineales (como se ha explicado anteriormente, en la Sección 2), las conclusiones obtenidas a través del análisis mediante LMIs deben ser completadas con una estimación del dominio de atracción. El lector interesado puede consultar como aplicar dicho procedimiento en (Bruzelius et al., 2003a,b; Pitarch et al., 2012).

Por último, vale la pena resaltar que la principal debilidad de emplear  $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$  para realizar el análisis es que se consideran variaciones en los parámetros  $\theta$  arbitrariamente rápidas. Por esta razón, se han propuesto en la literatura funciones alternativas, como las dependientes de los parámetros (Gahinet et al., 1996; Trofino et al., 2001):

$$V(x(t), \theta(t)) = x(t)^T P(\theta(t)) x(t) \quad (21)$$

que permiten tener en cuenta los límites conocidos sobre la tasa de variación de  $\theta$ .

A continuación, resumimos algunos de los resultados más relevantes de análisis para sistemas LPV utilizando LMIs.

#### 3.1. $\mathcal{D}$ -estabilidad

La idea de  $\mathcal{D}$ -estabilidad de un sistema está relacionada con la posición de sus polos y permite analizar o determinar sus características transitorias. La  $\mathcal{D}$ -estabilidad se basa en la definición de una *región LMI* (Chilali and Gahinet, 1996), que es

<sup>2</sup>Debido al uso de una función cuadrática de Lyapunov, estas LMIs son conocidas como *condiciones de estabilidad cuadrática* (Amato, 2006).

un subconjunto  $\mathcal{D}$  del plano complejo definido por una matriz simétrica  $\alpha = [\alpha_{kl}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y una matriz  $\beta = [\beta_{kl}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que:

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : f_D(s) < 0\} \quad (22)$$

donde  $f_D(s)$  es la *función característica*, definida como:

$$f_D(s) = \alpha + s\beta + s^*\beta^T = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}s + \beta_{lk}s^*]_{1 \leq k, l \leq m} \quad (23)$$

y  $s^*$  denota el complejo conjugado de  $s$ .

Entre las regiones LMI más utilizadas se encuentran (ver Figura 1):

- semiplano a la izquierda  $Re(s) < \lambda_L$

$$\alpha = -2\lambda \quad \beta = 1$$

- semiplano a la derecha  $Re(s) > \lambda_R$

$$\alpha = 2\lambda \quad \beta = -1$$

- regiones circulares centradas en  $(-q, 0)$ , de radio  $r$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -r & q \\ q & -r \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- sectores cónicos centrados en el origen, con ángulo  $\theta$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

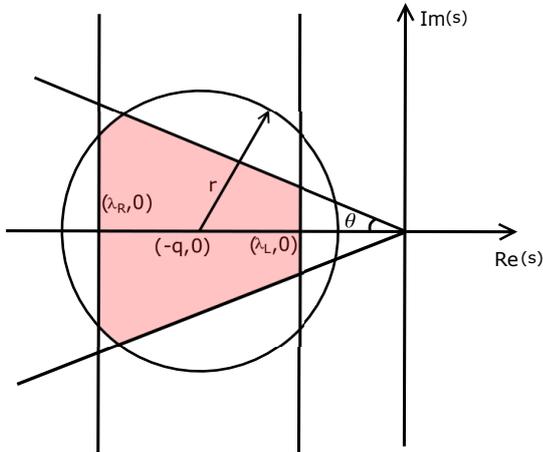


Figura 1: Representación gráfica de las regiones LMI.

Dada una región LMI  $\mathcal{D}$ , el sistema autónomo (14) es  $\mathcal{D}$ -estable si todos sus polos están en  $\mathcal{D}$ . Con un ligero abuso de la terminología, los polos del sistema LPV (17) se pueden definir como el conjunto de todos los polos de los modelos LTI que se pueden obtener *congelando* los parámetros variantes  $\theta(t)$  a todos los posibles valores constantes  $\theta^* \in \Theta$ . Con tal definición, es posible extender la noción de  $\mathcal{D}$ -estabilidad a los sistemas LPV, lo cual permite imponer la decadencia exponencial de los transitorios (Chilali et al., 1999), así como resolver problemas

prácticos en el diseño de controladores LPV relacionados con la presencia de dinámicas rápidas (Ghersin and Peña, 2002).

(Chilali and Gahinet, 1996) han proporcionado una condición basada en LMIs para evaluar la  $\mathcal{D}$ -estabilidad del sistema autónomo LTI (14), que ha sido extendida al caso LPV por (Ghersin and Peña, 2010). Más específicamente, el sistema autónomo LPV (84) es *cuadráticamente  $\mathcal{D}$ -estable* si existe una matriz simétrica  $P > 0$  tal que:

$$\alpha \otimes P + \beta \otimes (A(\theta)P) + \beta^T \otimes (A(\theta)P)^T < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (24)$$

donde  $\otimes$  denota el producto de Kronecker.

Por ejemplo, si deseamos verificar que los polos de (84) están dentro de la región circular centrada en  $(-q, 0)$  de radio  $r$ , (24) se convierte en:

$$\begin{pmatrix} -rP & qP + A(\theta)P \\ qP + PA(\theta)^T & -rP \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (25)$$

### 3.2. Desempeño $\mathcal{H}_\infty$ cuadrático

La metodología de control  $\mathcal{H}_\infty$  se utiliza para controlar sistemas cuyas ecuaciones de estado y de salida estén afectadas por perturbaciones desconocidas (Isidori and Astolfi, 1992; Rascoñ et al., 2014). La noción de desempeño  $\mathcal{H}_\infty$ , inicialmente propuesta para sistemas LTI, en los cuales se relaciona con la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la matriz de transferencia, se interpreta en sistemas LPV del tipo:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B_w(\theta(t))w(t) \quad (26)$$

$$z_\infty(t) = C_w(\theta(t))x(t) + D_w(\theta(t))w(t) \quad (27)$$

donde  $w(t)$  es una entrada desconocida (perturbación) y  $z_\infty$  es una salida de interés, como la existencia de un límite superior  $\gamma$  en la ganancia  $\mathcal{L}_2$  entre  $w$  y  $z_\infty$ , lo que implica que  $z_\infty(t)$  satisface, para el estado inicial  $x(0) = 0$ , y  $\forall t > 0$ :

$$\int_0^t z_\infty(\tau)^T z_\infty(\tau) d\tau < \gamma^2 \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau \quad (28)$$

para todas las posibles trayectorias del parámetro  $\theta$  en  $\Theta$ .

A través del lema de acotamiento real (BRL, del inglés *Bounded Real Lemma*) (Apkarian et al., 1995), es posible obtener unas LMIs para analizar la satisfacción de (28). En particular, el BRL establece que el sistema (26)-(27) tiene un desempeño  $\mathcal{H}_\infty$  cuadrático igual a  $\gamma$  si existe una matriz simétrica  $P > 0$  tal que:

$$\begin{pmatrix} A(\theta)^T P + PA(\theta) & PB_w(\theta) & C_w(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T P & -\gamma I & D_w(\theta)^T \\ C_w(\theta) & D_w(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (29)$$

### 3.3. Coste cuadrático garantizado

El concepto de *coste garantizado* generaliza la función de coste del regulador lineal cuadrático (LQR, del inglés *Linear Quadratic Regulator*). El enfoque LQR, que se encarga de encontrar la ganancia de realimentación óptima que minimiza una función de coste para un sistema LTI, no puede ser aplicado al caso LPV debido a que el valor final de la función de coste dependerá de la trayectoria específica del vector de parámetros variantes  $\theta$ , que no se conoce a priori. Por lo tanto, para evitar este problema, a través del concepto de coste garantizado, en lugar de realizar directamente la minimización de la función de coste, se minimiza un límite superior de dicha función.

Para mostrar este concepto, consideremos el sistema LPV autónomo (17), con una condición inicial dada  $x(0) = x_0$ , y la siguiente función de coste cuadrática:

$$J = \int_0^{\infty} x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau \quad (30)$$

donde  $Q = H^T H \geq 0$ , con  $H \in \mathbb{R}^{n_q \times n_x}$ ,  $n_q = \text{rank}(Q)$ .

Tal como sugirió (Ostertag, 2011), un método práctico para minimizar  $J$  es garantizar que esté por debajo de una cota  $\gamma$ , y de esta forma, minimizar  $\gamma$  en lugar de  $J$ . Para hacerlo, se introduce una función de Lyapunov  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ , con una matriz simétrica  $P > 0$  tal que:

$$V(x_0) = x_0^T P x_0 < \gamma \quad (31)$$

$$\dot{V}(x(t)) + x(t)^T Q x(t) < 0 \quad (32)$$

Integrando de 0 a  $\infty$ , obtenemos:

$$J = \int_0^{\infty} x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau < V(x_0) < \gamma \quad (33)$$

Luego, aplicando los complementos de Schur, se puede mostrar que (31)-(32) pueden reescribirse de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} > 0 \quad (34)$$

$$\begin{pmatrix} A(\theta)P + PA(\theta) & PH^T \\ HP & -I \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (35)$$

proporcionando así unas LMIs para analizar el coste cuadrático garantizado para un sistema LPV.

## 4. Control de sistemas LPV basado en LMIs

Los resultados presentados en la sección anterior se pueden usar para diseñar controladores que alcancen unas especificaciones deseadas.

### 4.1. Control por realimentación del estado

Consideremos un controlador LPV basado en la técnica de realimentación del estado:

$$u(t) = K(\theta(t)) x(t) \quad (36)$$

donde  $K(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  es la ganancia, para un sistema LPV con estructura como en (2). Combinando (2) y (36), se obtiene que el sistema en lazo cerrado es descrito por el sistema autónomo LPV:

$$\dot{x}(t) = (A(\theta(t)) + B(\theta(t))K(\theta(t))) x(t) \quad (37)$$

de modo que las LMIs (18) se pueden aplicar, obteniendo:

$$A(\theta)^T P + PA(\theta) + K(\theta)^T B(\theta)^T P + PB(\theta)K(\theta) < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (38)$$

La Ecuación (38) es una desigualdad bilineal matricial (BMI, del inglés *Bilinear Matrix Inequality*), debido a que las variables desconocidas  $K(\theta)$  y  $P$  aparecen en el mismo producto de matrices  $PB(\theta)K(\theta)$ . Sin embargo, es posible transformar (38) en LMIs mediante un cambio de variable. Antes de hacerlo, es apropiado discutir brevemente sobre la dualidad de las desigualdades matriciales obtenidas a partir de la teoría de Lyapunov (Goebel et al., 2006), que establece que para estas desigualdades es siempre posible obtener una *forma dual*. Por ejemplo, la forma dual de la LMI (18) está dada por:

$$A(\theta)P + PA(\theta)^T < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (39)$$

que se obtiene pre- y post-multiplicando (18) por  $P^{-1}$ , y realizando luego el cambio  $P^{-1} \rightarrow P$ . En consecuencia, la forma dual de (38) es:

$$A(\theta)P + PA(\theta)^T + B(\theta)K(\theta)P + PK(\theta)^T B(\theta)^T < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (40)$$

Luego, al realizar el cambio de variable  $\Gamma(\theta) = K(\theta)P$ , (40) se convierte en:

$$A(\theta)P + PA(\theta)^T + B(\theta)\Gamma(\theta) + \Gamma(\theta)^T B(\theta)^T < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (41)$$

que es en forma de LMI. Es importante mencionar que, en el caso de que se deseen especificaciones múltiples, el cambio de variable  $\Gamma(\theta) = K(\theta)P$  introduce cierto conservadurismo, ya que fuerza a usar la misma matriz  $P$  para todas las especificaciones, en lugar de usar diferentes matrices para diferentes especificaciones. De todas formas, utilizar LMIs en lugar de BMIs es conveniente, debido a la eficiencia computacional de los algoritmos que permiten solucionar LMIs y al hecho de que las BMIs son no convexas, por lo cual no existe garantía de obtener un mínimo global.

Al igual que en el caso del análisis, (41) plantea un problema computacional debido al número infinito de condiciones. Lamentablemente, la aplicación directa del enfoque politópico, asumiendo que:

$$\begin{pmatrix} A(\theta(t)) \\ B(\theta(t)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \quad (42)$$

y eligiendo:

$$K(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) K_i \Rightarrow \Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta) \Gamma_i \quad (43)$$

no es inmediata, debido a que:

$$B(\theta)\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^N \mu_j(\theta(t)) B_j \Gamma_i \quad (44)$$

de manera que (41) da lugar al problema de verificar la negatividad de una doble suma politópica. Se podría pensar de reescribir (41) como:

$$A_i P + P A_i^T + B_j \Gamma_i + \Gamma_i^T B_j^T < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (45)$$

pero esta solución tiene la desventaja de que una ganancia vértice  $K_i$  debe ser robusta respecto a todos los valores posibles de  $B(\theta)$ , lo cual corresponde a un grado muy elevado de conservadurismo. Por esta razón, en la literatura han aparecido soluciones alternativas. Históricamente, la primera fue propuesta por (Apkarian et al., 1995), y consiste en emplear un pre-filtrado de la entrada de control  $u(t)$ , introduciendo el sistema:

$$\dot{x}_u(t) = A_u x_u(t) + B_u \tilde{u}(t) \quad (46)$$

$$u(t) = C_u x_u(t) \quad (47)$$

donde  $x_u(t)$  es el estado del filtro,  $\tilde{u}(t)$  es la nueva entrada de control y  $A_u, B_u, C_u$  son matrices elegidas de manera que  $A_u$  sea estable y su dinámica despreciable frente a la del sistema LPV (2). De esta manera la combinación de (2) con (46)-(47) lleva a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t))C_u \\ 0 & A_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_u \end{pmatrix} \tilde{u}(t) \quad (48)$$

que es un sistema LPV con matriz de entrada constante y por el cual la variabilidad asociada a  $B(\theta(t))$  queda incrustada en la matriz de estado. Sin embargo, cabe destacar que trabajos recientes han puesto en duda las ventajas aportadas por el filtro (46)-(47) respecto a usar directamente las LMIs (45) para el diseño del controlador (Pandey et al., 2016; Sehr and de Oliveira, 2017).

Una solución alternativa consiste en relajar (45). (Tuan et al., 2001) fue uno de los primeros trabajos que abordó el tema de la relajación, demostrando que (41) queda satisfecha si:

$$A_i P + P A_i + B_i \Gamma_i + \Gamma_i^T B_i^T < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (49)$$

$$\frac{[A_i P + P A_i + B_i \Gamma_i + \Gamma_i^T B_i^T]}{N-1} + \frac{[A_i P + P A_i + B_j \Gamma_i + \Gamma_i^T B_j^T]}{2} \quad (50)$$

$$\frac{+A_j P + P A_j + B_i \Gamma_j + \Gamma_j^T B_i^T]}{2} < 0 \quad \forall i, j: 1 \leq i \neq j \leq N$$

Entre la mirada de condiciones disponibles en la literatura que disminuyen el conservadurismo de evaluar (45), usualmente bajo el coste de aumentar la carga computacional, vale la pena describir las condiciones propuestas por (Sala and Ariño, 2007), que presentaron una aplicación al control borroso de los teoremas de Polya sobre formas positivas en el símplex estándar. El resultado es un conjunto de condiciones suficientes para probar la positividad de las sumas dobles, que son progresivamente menos conservadoras a medida que un parámetro de complejidad  $n$  aumenta. Estas condiciones son asintóticamente exactas, o sea, necesarias y suficientes cuando  $n$  tiende al infinito.

Introduzcamos la siguiente notación:

$$\mathbb{I}_n = \{\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i_j \leq N \forall j = 1, \dots, n\} \quad (51)$$

$$\mathbb{I}_n^+ = \{\vec{i} \in \mathbb{I}_n \mid i_k \leq i_{k+1}, k = 1, \dots, n-1\} \quad (52)$$

y definamos  $\mathcal{P}(\vec{i}) \subset \mathbb{I}_n$  como el conjunto de permutaciones, con posibles elementos repetidos, del multi-index  $\vec{i}$ . Entonces, para cualquier  $n$ :

$$\sum_{\vec{j} \in \mathcal{P}(\vec{i})} [A_{j_1} P + P A_{j_1}^T + B_{j_2} \Gamma_{j_1} + \Gamma_{j_1}^T B_{j_2}^T] < 0 \quad \forall \vec{i} \in \mathbb{I}_n^+ \quad (53)$$

es condición suficiente para (41). Además, existe un valor de  $n$  finito tal que (53) es necesaria y suficiente (Sala and Ariño, 2007).

Entre las condiciones alternativas hay las obtenidas generando particiones del polítopo a través del método de triangulación (Kruszewski et al., 2009), lo cual permite obtener una familia de condiciones suficientes para sumas dobles y, en paralelo, otra familia de condiciones necesarias, que se vuelven asintóticamente exactas al disminuir el tamaño de las particiones, y las condiciones propuestas por (Sala and Ariño, 2008), que permiten relajar las condiciones de doble suma politópica para tener en cuenta, por ejemplo, de que haya huecos en el conjunto  $\Theta$ .

Vale la pena señalar que lo discutido en esta sección no se aplica solo al problema del diseño de controladores para la estabilización cuadrática, sino también al caso de otras especificaciones, tal como la  $\mathcal{D}$ -estabilización, el control  $\mathcal{H}_\infty$ , el control con coste garantizado y muchas más que se han omitido en este tutorial debido a la limitación de espacio. Por ejemplo, reemplazando  $A(\theta) + B(\theta)K(\theta) \rightarrow A(\theta)$  en (24), y realizando el cambio de variables  $\Gamma(\theta) = K(\theta)P$ , las condiciones para la  $\mathcal{D}$ -estabilización cuadrática se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \alpha \otimes P + \beta \otimes (A(\theta)P + B(\theta)\Gamma(\theta)) \\ + \beta^T \otimes (A(\theta)P + B(\theta)\Gamma(\theta))^T < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned} \quad (54)$$

De forma parecida, se puede realizar el control  $\mathcal{H}_\infty$  cuadrático utilizando (29), en la cual el término superior izquierdo  $A(\theta)^T P + P A(\theta)$  es reemplazado por el término a mano izquierda en (41). Finalmente, de acuerdo con (Rotondo et al., 2015b), el control con coste garantizado puede diseñarse modificando el criterio cuadrático (30) en:

$$J = \int_0^\infty [x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau)] d\tau \quad (55)$$

donde  $R > 0$  y demostrando que las LMIs para obtener una ganancia de controlador de coste garantizado están dadas por (34) y:

$$\begin{pmatrix} A(\theta)P + B(\theta)\Gamma(\theta) + \star & P H^T & \Gamma(\theta)^T \\ H P & -I & 0 \\ \Gamma(\theta) & 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (56)$$

donde  $\star$  indica el término inducido por simetría.

#### 4.2. Control por realimentación de salida

Otra técnica relevante es el diseño de un controlador por realimentación de la salida:

$$\dot{x}_K(t) = A_K(\theta(t))x_K(t) + B_K(\theta(t))y(t) \quad (57)$$

$$u(t) = C_K(\theta(t))x_K(t) + D_K(\theta(t))y(t) \quad (58)$$

donde  $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}$  es el estado interno del controlador, y  $A_K(\theta(t))$ ,  $B_K(\theta(t))$ ,  $C_K(\theta(t))$ ,  $D_K(\theta(t))$  son las matrices en espacio de estado del controlador, para un sistema con ecuación de estado (2) y ecuación de salida:

$$y(t) = C(\theta(t))x(t) \quad (59)$$

En este caso, el sistema autónomo resultante de (2) y (57)-(59) es (para simplificar la notación, se omite la dependencia de  $\theta$  sobre  $t$ ):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) + B(\theta)D_K(\theta)C(\theta) & B(\theta)C_K(\theta) \\ B_K(\theta)C(\theta) & A_K(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{pmatrix} \quad (60)$$

Debido a la presencia del término  $C(\theta)$  post-multiplicando  $B_K(\theta)$  y  $D_K(\theta)$  en (60), el cambio de variables necesario para obtener LMIs es más complejo. Como se detalla en (Chilali and Gahinet, 1996), al particionar tanto  $P$  como su inversa de la siguiente manera:

$$P = \begin{pmatrix} Q & M \\ M^T & U \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & V \end{pmatrix} \quad (61)$$

es posible definir nuevas variables:

$$\mathcal{B}_K(\theta) = NB_K(\theta) + SB(\theta)D_K(\theta) \quad (62)$$

$$C_K(\theta) = C_K(\theta)M^T + D_K(\theta)C(\theta)Q \quad (63)$$

$$\mathcal{A}_K(\theta) = NA_K(\theta)M^T + NB_K(\theta)C(\theta)Q + SB(\theta)C_K(\theta)M^T + S(A(\theta) + B(\theta)D_K(\theta)C(\theta))Q \quad (64)$$

de modo que, si  $M$  y  $N$  tienen rango de fila completo, entonces dadas las matrices  $\mathcal{A}_K(\theta)$ ,  $\mathcal{B}_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$ ,  $D_K(\theta)$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $N$ , es siempre posible calcular las ganancias del controlador  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  que satisfacen (62)-(64). Además, si  $n_K = n_x$  ( $M$  y  $N$  son cuadradas e invertibles), entonces  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  estarán determinadas de manera única.

Por lo tanto, por medio de una transformación de congruencia apropiada, a través de la matriz:

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{pmatrix} \quad (65)$$

la condición de estabilidad cuadrática (39) se transforma en:

$$\begin{pmatrix} Q & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \quad (66)$$

$$\Phi(\theta) + \Phi(\theta)^T < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (67)$$

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta)Q + B(\theta)C_K(\theta) & A(\theta) + B(\theta)D_K(\theta)C(\theta) \\ \mathcal{A}_K(\theta) & SA(\theta) + \mathcal{B}_K(\theta)C(\theta) \end{pmatrix} \quad (68)$$

donde (66) asegura la invertibilidad de  $M$  y  $N$ . De manera parecida, la condición de  $\mathcal{D}$ -estabilidad (24) se convierte en (66) y:

$$\alpha \otimes \begin{pmatrix} Q & I \\ I & S \end{pmatrix} + \beta \otimes \Phi(\theta) + \beta^T \otimes \Phi(\theta)^T < 0 \quad (69)$$

De la misma forma, se pueden obtener las condiciones para realizar el control  $\mathcal{H}_\infty$ , con coste garantizado, o para alcanzar otras especificaciones. Nótese, que sumas politópicas dobles y triples aparecen debido a los términos  $B(\theta)C_K(\theta)$ ,  $\mathcal{B}_K(\theta)C(\theta)$  y  $B(\theta)D_K(\theta)C(\theta)$ , respectivamente, para las cuales es aplicable lo presentado en la Sección 4.1, con ligeras modificaciones.

Vale la pena señalar que en sistemas quasi-LPV en los cuales  $\theta(t)$  dependa de estados no medidos, el análisis y diseño del control por realimentación de salida se vuelve más complicado, véase por ejemplo (Kose and Jabbari, 1999).

#### 4.3. Control basado en observador de estado

Finalmente, para el sistema (2) con ecuación de salida (59), es posible diseñar un observador de estado, es decir, un sistema dinámico que proporciona una estimación del estado  $x(t)$ :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\theta(t))\hat{x}(t) + B(\theta(t))u(t) + L(\theta(t))(\hat{y}(t) - y(t)) \quad (70)$$

$$\hat{y}(t) = C(\theta(t))\hat{x}(t) \quad (71)$$

y usar el estado observado  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  para alimentar el controlador, reemplazando (36) con:

$$u(t) = K(\theta(t))\hat{x}(t) \quad (72)$$

Al definir  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , el sistema autónomo resultante de la conexión de (2), (59) y (70)-(72) es (se omite la dependencia sobre  $t$ ):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) + B(\theta)K(\theta) & B(\theta)K(\theta) \\ 0 & A(\theta) + L(\theta)C(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \quad (73)$$

Es preciso recordar que para los sistemas LPV, de manera parecida a los sistemas LTI, una estructura de la matriz de estado de tipo triangular a bloques permite centrarse en las propiedades de los subsistemas en la diagonal, lo cual permite aplicar el principio de separación. Este resultado, inicialmente desarrollado para sistemas TS (Tanaka and Wang, 2001), proporciona el marco teórico para realizar el control basado en observador de estado utilizando las LMIs presentadas anteriormente, o sus formas duales, que se pueden utilizar para diseñar la ganancia del observador de estado  $L(\theta)$ . Por ejemplo, para la estabilidad cuadrática, (16) lleva a:

$$PA(\theta) + A(\theta)^T P + \Lambda(\theta)C + C^T \Lambda(\theta)^T < 0 \quad (74)$$

donde  $\Lambda(\theta) = PL(\theta)$ .

De manera parecida al caso de la realimentación de salida, también en el caso del control basado en observador de estado se debe tener cuidado cuando se consideren sistemas quasi-LPV en los cuales  $\theta(t)$  dependa de estados no medidos, véase por ejemplo (Heemels et al., 2010).

#### 4.4. Consideraciones adicionales

Finalmente, es de interés el hecho que, mediante modificaciones apropiadas de los métodos de análisis y diseño LPV, es posible tener en cuenta tanto las incertidumbres paramétricas como permitir la modificación en línea de las prestaciones del sistema de control. En el primer caso, hace falta reemplazar las expresiones politópicas (19) y (42) con expresiones *a doble capa* (Rotondo et al., 2014):

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(\theta(t)) \\ \tilde{B}(\theta(t)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) \begin{pmatrix} \tilde{A}_i \\ \tilde{B}_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) \sum_{m=1}^{M_i} \eta_{im} \begin{pmatrix} A_{im} \\ B_{im} \end{pmatrix} \quad (75)$$

con los coeficientes  $\mu_i(\theta(t))$  que cumplen (6) y los coeficientes  $\eta_{im}$  tales que:

$$\sum_{m=1}^{M_i} \eta_{im} = 1, \quad \eta_{im} \geq 0 \quad \forall m = 1, \dots, M_i \quad (76)$$

En (75), las matrices  $\tilde{A}(\theta(t))$ ,  $\tilde{B}(\theta(t))$ ,  $\tilde{A}_i$  y  $\tilde{B}_i$  son inciertas, mientras que  $A_{im}$  y  $B_{im}$  son conocidas, ya que toda la incertidumbre está contenida en los coeficientes  $\eta_{im}$ . Por lo tanto, la ganancia del controlador LPV (43) puede diseñarse para que el sistema de control presente robustez frente a la incertidumbre paramétrica, reemplazando (45) con:

$$A_{im}P + PA_{im}^T + B_{jm}\Gamma_i + \Gamma_i^T B_{jm}^T < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad \forall m = 1, \dots, M_i \quad (77)$$

Nótese que la representación politópica de doble capa generada por (75) puede verse como un caso especial de la estructura del producto tensorial, que surge de un sistema escrito como una suma politópica multidimensional. Por lo tanto, condiciones LMI relajadas para el análisis o el diseño se pueden obtener siguiendo los resultados teóricos disponibles en la literatura, como por ejemplo los que se encuentran en (Scherer, 1998) y (Ariño and Sala, 2007). Sin embargo, en el caso de sistemas con varios parámetros inciertos, una caracterización elipsoidal de la incertidumbre podría ser preferible para evitar problemas computacionales relacionados con el crecimiento exponencial del número total de vértices politópicos (Tanaka et al., 2000).

En el segundo caso, detallado en (Rotondo et al., 2015a), el parámetro  $\theta$  es utilizado para inducir variaciones en indicadores de prestación como la región LMI  $\mathcal{D}$  o el desempeño  $\mathcal{H}_\infty \gamma$ , obteniendo respectivamente  $\mathcal{D}(\theta)$  o  $\gamma(\theta)$ . Este paradigma, denominado *mudable* (del inglés *shifting*), es apropiado para todas las situaciones en las cuales una degradación de las prestaciones, en unas condiciones concretas de funcionamiento, sea deseable.

## 5. Ejemplos

Para ilustrar de forma didáctica la metodología de diseño utilizando LMIs, se utilizarán dos ejemplos: el primero es un ejemplo numérico que enseñará la aplicación de las condiciones (45) y (51)-(53) para el diseño de un controlador en el caso en el

cual la matriz de entrada del sistema depende de algún parámetro variable  $\theta(t)$ ; el segundo ejemplo es la aplicación a un sistema de doble rotor con múltiples entradas y salidas (TRMS, del inglés *Twin Rotor MIMO System*). El TRMS es una plataforma de prueba que emula el comportamiento aerodinámico de un helicóptero, el cual se considera un problema de ingeniería desafiante e interesante debido a su alta no linealidad, al acoplamiento entre sus ejes y a la inaccesibilidad de algunos estados y salidas para la medición (Carrillo-Ahumada et al., 2015). Con el fin de resaltar las características principales de un diseño basado en LMIs, se considerará un modelo simplificado del TRMS, en el cual solo se tomará en cuenta la dinámica horizontal. El lector interesado puede encontrar el modelado, la identificación y el control quasi-LPV para todo el TRMS, que comprende ambas dinámicas (tanto la horizontal como vertical) en (Rotondo et al., 2013).

### 5.1. Ejemplo numérico

Se considera el problema de diseñar la ganancia  $K(\theta(t))$  del controlador por realimentación de estado (36), para un sistema LPV en la forma proporcionada en la Ecuación (2), con matrices politópicas como en (43) dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 2-a & -7 \\ 1+a & 3 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -7+a \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & B_3 &= \begin{pmatrix} 1+a \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde  $a$  es un parámetro no negativo, cuyo valor cuantifica la diferencia entre los vértices (obsérvese que para  $a = 0$ ,  $A_1 = A_2 = A_3$  y  $B_1 = B_2 = B_3$ , por lo tanto el sistema LPV se convierte en un sistema LTI).

Tal y como se ha detallado en la Sección 4.1, debido a la variabilidad en la matriz  $B(\theta(t))$ , la utilización de (45) para el diseño de las ganancias vértice del controlador  $K_1 = \Gamma_1 P^{-1}$ ,  $K_2 = \Gamma_2 P^{-1}$  y  $K_3 = \Gamma_3 P^{-1}$ , que conduce a:

$$\begin{aligned} A_1 P + B_1 \Gamma_1 + \star &< 0, & A_1 P + B_2 \Gamma_1 + \star &< 0 \\ A_1 P + B_3 \Gamma_1 + \star &< 0, & A_2 P + B_1 \Gamma_2 + \star &< 0 \\ A_2 P + B_2 \Gamma_2 + \star &< 0, & A_2 P + B_3 \Gamma_2 + \star &< 0 \\ A_3 P + B_1 \Gamma_3 + \star &< 0, & A_3 P + B_2 \Gamma_3 + \star &< 0 \\ A_3 P + B_3 \Gamma_3 + \star &< 0 \end{aligned}$$

donde  $\star$  indica el término inducido por simetría, introduce mucho conservadurismo. De hecho, a través de la YALMIP *toolbox* (Lofberg, 2004) con el *solver* SeDuMi (Sturm, 1999), se consigue encontrar soluciones a las LMIs solamente por valores de  $a$  hasta  $a = 0,5$ .

Para  $n = 2$ , los conjuntos (51)-(52) se expresan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \\ \mathbb{I}_2^+ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \end{aligned}$$

por lo cual los conjuntos  $\mathcal{P}(\vec{i})$  son:  $\mathcal{P}(1, 1) = \{(1, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 2) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 3) = \{(1, 3), (3, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(2, 2) = \{(2, 2)\}$ ,

$\mathcal{P}(2, 3) = \{(2, 3), (3, 2)\}$  y  $\mathcal{P}(3, 3) = \{(3, 3)\}$  y las LMIs (53) corresponden a:

$$\begin{aligned} A_1P + B_1\Gamma_1 + \star < 0, \quad A_1P + A_2P + B_2\Gamma_1 + B_1\Gamma_2 + \star < 0 \\ A_1P + A_3P + B_3\Gamma_1 + B_1\Gamma_3 + \star < 0, \quad A_2P + B_2\Gamma_2 + \star < 0 \\ A_2P + A_3P + B_3\Gamma_2 + B_2\Gamma_3 + \star < 0, \quad A_3P + B_3\Gamma_3 + \star < 0 \end{aligned}$$

que son menos conservadoras que las anteriores. De hecho, utilizando estas LMIs, se consigue encontrar soluciones por valores de  $a$  hasta  $a = 8,9$ .

Por otro lado, para  $n = 3$ , se obtiene:

$$\mathbb{I}_3^+ = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3), \dots \\ \dots (1, 3, 3), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3)\}$$

y  $\mathcal{P}(1, 1, 1) = \{(1, 1, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 1, 2) = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 1, 3) = \{(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 2, 2) = \{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 2, 3) = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 3, 3) = \{(1, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 3, 1)\}$ ,  $\mathcal{P}(2, 2, 2) = \{(2, 2, 2)\}$ ,  $\mathcal{P}(2, 2, 3) = \{(2, 2, 3), (2, 3, 2), (3, 2, 2)\}$ ,  $\mathcal{P}(2, 3, 3) = \{(2, 3, 3), (3, 2, 3), (3, 3, 2)\}$ ,  $\mathcal{P}(3, 3, 3) = \{(3, 3, 3)\}$ , por lo cual las LMIs (53) se expresan como:

$$\begin{aligned} A_iP + B_i\Gamma_i + \star < 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2A_iP + A_jP + B_i\Gamma_i + B_j\Gamma_j + B_i\Gamma_j + \star < 0, \quad (i, j) = (1, 2), \dots \\ \dots (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( 2A_iP + \sum_{j=1, i \neq j}^3 B_i\Gamma_j \right) + \star < 0$$

que disminuyen aún más el conservadurismo, ya que con estas LMIs se consigue encontrar soluciones para valores de  $a$  hasta  $a = 12,6$ . Al seguir aumentando los valores de  $n$  se consigue incrementar el valor máximo de  $a$  para el cual se pueden encontrar soluciones, pero con un coste computacional mayor (nótese que  $n = 2$  proporciona 6 LMIs, mientras que para  $n = 3$  encontramos 10 LMIs).

## 5.2. Aplicación al TRMS

La dinámica horizontal del TRMS se describe mediante un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales (Rotondo et al., 2013):

$$\frac{d\omega_h}{dt} = \frac{k_a k_1}{J_{tr} R_a} u_h - \left( \frac{B_{tr}}{J_{tr}} + \frac{k_a^2}{J_{tr} R_a} \right) \omega_h - \frac{f_1(\omega_h)}{J_{tr}} \quad (78)$$

$$\frac{d\Omega_h}{dt} = \frac{l_t f_2(\omega_h) \cos \theta_v^0 - k_{oh} \Omega_h - f_3(\theta_h)}{K_D \cos^2 \theta_v^0 + K_E \sin^2 \theta_v^0 + K_F} \quad (79)$$

$$\frac{d\theta_h}{dt} = \Omega_h \quad (80)$$

donde la descripción de los símbolos se proporciona en la Tabla 1, mientras que los valores de los parámetros utilizados en el resto de la sección se resumen en la Tabla 2. La entrada del sistema es  $u_h$ , el vector de estado del sistema es  $x = [\omega_h, \Omega_h, \theta_h]^T$  y las funciones no lineales  $f_i(\cdot)$  se definen como:

$$f_1(\omega_h) = \begin{cases} k_{thp} \omega_h^2 & \text{si } \omega_h \geq 0 \\ -k_{thn} \omega_h^2 & \text{si } \omega_h < 0 \end{cases} \quad (81)$$

$$f_2(\omega_h) = \begin{cases} k_{fhp} \omega_h^2 & \text{si } \omega_h \geq 0 \\ -k_{fhn} \omega_h^2 & \text{si } \omega_h < 0 \end{cases} \quad (82)$$

$$f_3(\theta_h) = \begin{cases} k_{chp} \theta_h & \text{si } \theta_h \geq 0 \\ k_{chn} \theta_h & \text{si } \theta_h < 0 \end{cases} \quad (83)$$

Usando el enfoque de incrustación no lineal propuesto por (Kwiatkowski et al., 2006), las ecuaciones (78)-(80) puede llevarse a la forma equivalente quasi-LPV dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_h \\ \dot{\Omega}_h \\ \dot{\theta}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1(\omega_h) & 0 & 0 \\ \theta_2(\omega_h) & a_{22} & \theta_3(\theta_h) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_h \\ \Omega_h \\ \theta_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_h \quad (84)$$

Tabla 1: Definición de parámetros del TRMS

Símbolo	Descripción
$B_{tr}$	Coefficiente de fricción viscoso de la hélice
$f_1(\omega_h)$	Fricción de arrastre de la hélice
$f_2(\omega_h)$	Fuerza aerodinámica debido al rotor
$f_3(\theta_h)$	Torque de la fuerza del cable plano
$J_{tr}$	Momento de inercia de la hélice
$K_D, K_E, K_F$	Constantes físicas
$k_1$	Constante de entrada del motor
$k_a$	Constante de torque del motor
$k_{chn}$	Coefficiente de fuerza del cable para $\theta_h < 0$
$k_{chp}$	Coefficiente de fuerza del cable para $\theta_h \geq 0$
$k_{fhn}$	Coefficiente de fuerza aerodinámica del rotor para $\omega_h < 0$
$k_{fhp}$	Coefficiente de fuerza aerodinámica del rotor para $\omega_h \geq 0$
$k_{oh}$	Coefficiente de fricción horizontal del subsistema de vigas
$k_{thn}$	Coefficiente de fricción de arrastres de la hélice para $\omega_h < 0$
$k_{thp}$	Coefficiente de fricción de arrastres de la hélice para $\omega_h \geq 0$
$l_t$	Longitud de la viga
$R_a$	Resistencia de armadura del motor
$u_h$	Voltaje de entrada del motor
$\theta_h$	Ángulo de guiñada de viga
$\theta_v^0$	Ángulo de cabeceo de equilibrio
$\omega_h$	Velocidad de rotación del rotor
$\Omega_h$	Velocidad angular del TRMS alrededor del eje vertical

donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{B_{tr}}{J_{tr}} - \frac{k_a^2}{J_{tr} R_a} \\ a_{22} &= -\frac{k_{oh}}{K_D \cos^2 \theta_v^0 + K_E \sin^2 \theta_v^0 + K_F} \\ b_1 &= \frac{k_a k_1}{J_{tr} R_a} \\ \theta_1(\omega_h) &= \begin{cases} -\frac{k_{thp} \omega_h}{J_{tr}} & \text{if } \omega_h \geq 0 \\ \frac{k_{thn} \omega_h}{J_{tr}} & \text{if } \omega_h < 0 \end{cases} \\ \theta_2(\omega_h) &= \begin{cases} \frac{l_t k_{fhp} \omega_h \cos \theta_v^0}{K_D \cos^2 \theta_v^0 + K_E \sin^2 \theta_v^0 + K_F} & \text{if } \omega_h \geq 0 \\ -\frac{l_t k_{fhn} \omega_h \cos \theta_v^0}{K_D \cos^2 \theta_v^0 + K_E \sin^2 \theta_v^0 + K_F} & \text{if } \omega_h < 0 \end{cases} \\ \theta_3(\theta_h) &= \begin{cases} \theta_3^p = -\frac{k_{chp}}{K_D \cos^2 \theta_v^0 + K_E \sin^2 \theta_v^0 + K_F} & \text{if } \theta_h \geq 0 \\ \theta_3^n = -\frac{k_{chn}}{K_D \cos^2 \theta_v^0 + K_E \sin^2 \theta_v^0 + K_F} & \text{if } \theta_h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Seguindo a (Abdullah and Zribi, 2009), se utiliza un modelo de referencia para generar la trayectoria que se desea que el TRMS siga:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_h^{ref} \\ \dot{\Omega}_h^{ref} \\ \dot{\theta}_h^{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1(\omega_h) & 0 & 0 \\ \theta_2(\omega_h) & a_{22} & \theta_3(\theta_h) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_h^{ref} \\ \Omega_h^{ref} \\ \theta_h^{ref} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_h^{ref} \quad (85)$$

donde  $\omega_h^{ref}$ ,  $\Omega_h^{ref}$ ,  $\theta_h^{ref}$  son los estados de referencia y  $u_h^{ref}$  es la entrada de referencia (acción de pre-alimentación) tal que, definiendo los errores de seguimiento  $e_{\omega_h} = \omega_h - \omega_h^{ref}$ ,  $e_{\Omega_h} = \Omega_h - \Omega_h^{ref}$ , y la entrada incremental  $\Delta u_h = u_h - u_h^{ref}$  (acción de realimentación), se obtiene el modelo de error:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{\omega_h} \\ \dot{e}_{\Omega_h} \\ \dot{e}_{\theta_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1(\omega_h) & 0 & 0 \\ \theta_2(\omega_h) & a_{22} & \theta_3(\theta_h) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\omega_h} \\ e_{\Omega_h} \\ e_{\theta_h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u_h \quad (86)$$

Al garantizar la estabilidad cuadrática de (86), los errores de seguimiento convergen a cero, lo que significa que los estados del TRMS  $\omega_h$ ,  $\Omega_h$ ,  $\theta_h$  convergen a los estados de referencia  $\omega_h^{ref}$ ,  $\Omega_h^{ref}$ ,  $\theta_h^{ref}$ . Para obtener un modelo politópico para (86), nótese que  $\theta_1(\omega_h)$  y  $\theta_2(\omega_h)$  dependen de la misma variable de estado  $\omega_h$ , lo que sugiere que podrían considerarse juntas al buscar un politopo que contenga todos sus valores posibles. De hecho, como se muestra en la Figura 2, al trazar todos los valores  $(\theta_1, \theta_2)$  (puntos azules en la Figura 2) obtenidos para  $\omega_h \in [-\omega_h^{m\acute{a}x}, \omega_h^{m\acute{a}x}]$  con  $\omega_h^{m\acute{a}x} = 2,9 \text{ rad/s}$ , correspondiente a la velocidad de rotación máxima del rotor, se puede ver que se encuentran contenidos en el politopo (triángulo) con vértices  $(0, 0)$ ,  $(\theta_1^{m\acute{a}x}, \theta_2^{m\acute{a}x}) = (\theta_1(\omega_h^{m\acute{a}x}), \theta_2(\omega_h^{m\acute{a}x}))$  y  $(\theta_1^{m\acute{a}x}, \theta_2^{m\acute{a}x}) = (\theta_1(\omega_h^{m\acute{a}x}), \theta_2(\omega_h^{m\acute{a}x}))$  (círculos rojos en la Figura 2). Por otra parte,  $\theta_3(\theta_h)$  solo puede tomar dos valores, de modo que su límite politópico se da trivialmente por los dos valores admisibles.

Teniendo en cuenta los valores de los parámetros del TRMS dados en la Tabla 2, la matriz de estado en (86) se puede expresar

como (19), con seis vértices definidos como:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \theta_3^p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,47 & 0 & 0 \\ 0 & -0,42 & -0,36 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \theta_3^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,47 & 0 & 0 \\ 0 & -0,42 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1^{m\acute{a}x} & 0 & 0 \\ \theta_2^{m\acute{a}x} & a_{22} & \theta_3^p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,84 & 0 & 0 \\ 0,99 & -0,42 & -0,36 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_4 &= \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1^{m\acute{a}x} & 0 & 0 \\ \theta_2^{m\acute{a}x} & a_{22} & \theta_3^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,84 & 0 & 0 \\ 0,99 & -0,42 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_5 &= \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1^{m\acute{a}n} & 0 & 0 \\ \theta_2^{m\acute{a}n} & a_{22} & \theta_3^p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,79 & 0 & 0 \\ 0,85 & -0,42 & -0,36 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_6 &= \begin{pmatrix} a_{11} + \theta_1^{m\acute{a}n} & 0 & 0 \\ \theta_2^{m\acute{a}n} & a_{22} & \theta_3^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,79 & 0 & 0 \\ 0,85 & -0,42 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con los coeficientes  $\mu_i(\theta(t))$  dados por:

$$\mu_1(\theta(t)) = \alpha_1(\omega_h)\beta_p(\theta_h)$$

$$\mu_2(\theta(t)) = \alpha_1(\omega_h)\beta_n(\theta_h)$$

$$\mu_3(\theta(t)) = \alpha_2(\omega_h)\beta_p(\theta_h)$$

$$\mu_4(\theta(t)) = \alpha_2(\omega_h)\beta_n(\theta_h)$$

$$\mu_5(\theta(t)) = \alpha_3(\omega_h)\beta_p(\theta_h)$$

$$\mu_6(\theta(t)) = \alpha_3(\omega_h)\beta_n(\theta_h)$$

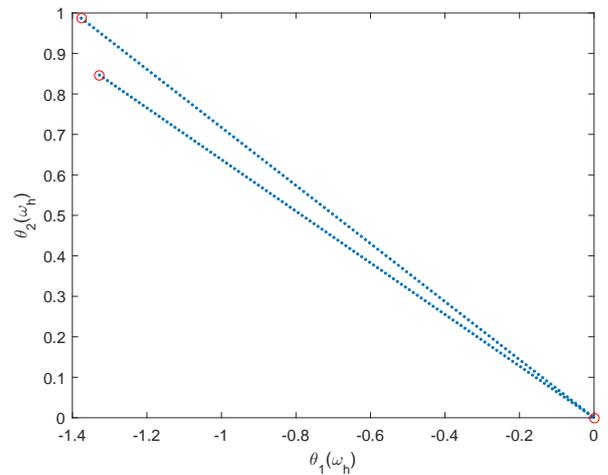


Figura 2: Bordes politopicos de  $(\theta_1, \theta_2)$

Tabla 2: Valores de los parámetros del TRMS

Par.	Valor	Par.	Valor	Par.	Valor	Par.	Valor
$B_{rr}$	0.0086	$J_{rr}$	0.0059	$k_{ihp}$	0.0027	$k_{ihm}$	0.0028
$k_{fhp}$	0.0566	$k_{fhn}$	0.0660	$k_{chp}$	0.0158	$k_{chn}$	0.0111
$K_D$	0.0553	$K_E$	0.0058	$K_F$	0.0059	$\theta_v^0$	-0.6194
$k_a$	0.0202	$k_1$	6.5	$R_a$	8	$I_t$	0.282
$k_{oh}$	0.0185						

donde  $\alpha_1(\omega_h)$ ,  $\alpha_2(\omega_h)$ ,  $\alpha_3(\omega_h)$ ,  $\beta_p(\theta_h)$  y  $\beta_n(\theta_h)$  son las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(\omega_h) \\ \theta_2(\omega_h) \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1(\omega_h) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2(\omega_h) \begin{pmatrix} \theta_1^{\min} \\ \theta_2^{\min} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3(\omega_h) \begin{pmatrix} \theta_1^{\max} \\ \theta_2^{\max} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_3(\theta_h) \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_p(\theta_h) \begin{pmatrix} \theta_3^p \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_n(\theta_h) \begin{pmatrix} \theta_3^n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que esta representación ya es cuadráticamente estable, ya que al escribir las LMIs (20):

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

junto con  $P > 0$ , la YALMIP *toolbox* (Lofberg, 2004) con el *solver* SeDuMi (Sturm, 1999) devuelve la siguiente matriz de Lyapunov:

$$P = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,48 & 0,06 \\ 0,48 & 2,24 & 0,47 \\ 0,06 & 0,47 & 0,77 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las matrices de vértices  $A_1$  y  $A_2$  no son controlables a través de  $(b_1, 0, 0)^T$  debido a su diagonalidad de bloques (aunque sí son cuadráticamente estables), se intenta encontrar una ganancia de controlador  $K(\theta(t))$  que aumente la tasa de decaimiento exponencial de la función de Lyapunov para las matrices de vértices  $A_3, A_4, A_5$  y  $A_6$ . De esta forma, se obtendrá un sistema en lazo cerrado que se vuelva más rápido para valores crecientes de  $|\omega_h|$ , siguiendo así el mismo espíritu del paradigma *mudable* detallado en (Rotondo et al., 2015a) y brevemente descrito en la Sección 4.4.

Para hacerlo, al implementar el controlador politópico (43), necesitaremos la  $\mathcal{D}$ -estabilidad de las matrices  $A_3, A_4, A_5, A_6$  en el semiplano a la izquierda  $Re(s) < \lambda_L$  (ver Sección 3.1) y la estabilidad cuadrática de las matrices  $A_1, A_2$  que, a través del cambio de variable  $\Gamma(\theta) = K(\theta)P$ , conduce al siguiente conjunto de LMIs:

$$\begin{aligned} A_1 P + B \Gamma_1 + P A_1^T + \Gamma_1^T B^T &< 0 \\ A_2 P + B \Gamma_2 + P A_2^T + \Gamma_2^T B^T &< 0 \\ A_3 P + B \Gamma_3 + P A_3^T + \Gamma_3^T B^T - 2\lambda_L P &< 0 \\ A_4 P + B \Gamma_4 + P A_4^T + \Gamma_4^T B^T - 2\lambda_L P &< 0 \\ A_5 P + B \Gamma_5 + P A_5^T + \Gamma_5^T B^T - 2\lambda_L P &< 0 \\ A_6 P + B \Gamma_6 + P A_6^T + \Gamma_6^T B^T - 2\lambda_L P &< 0 \end{aligned}$$

junto con  $P > 0$ , para la cual obtenemos la siguiente solución con  $\lambda_L = -0,4$ :

$$P = \begin{pmatrix} 2,19 & -0,95 & -0,02 \\ -0,95 & 1,09 & -0,95 \\ -0,02 & -0,95 & 2,32 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0,98 & -0,64 & 0,33 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 1,75 & -1,62 & 0,33 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_5 = \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 1,71 & -1,49 & 0,33 \end{pmatrix}$$

tal que:

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 0,32 & -0,28 & 0,03 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = K_4 = \begin{pmatrix} -0,30 & -2,53 & -0,89 \end{pmatrix}$$

$$K_5 = K_6 = \begin{pmatrix} -0,15 & -2,14 & -0,73 \end{pmatrix}$$

Para seguir una referencia constante  $\bar{\theta}_h$  para el ángulo de guiñada  $\theta_h$ , se debe proporcionar una entrada de referencia apropiada  $u_h^{ref}$ . A partir de (85), ajustando  $\theta_h^{ref} = \bar{\theta}_h$ ,  $\dot{\theta}_h^{ref} = 0$ ,  $\Omega_h^{ref} = 0$  and  $\dot{\Omega}_h^{ref} = 0$ , se obtiene:

$$\omega_h^{ref} = -\frac{\theta_3(\theta_h)}{\theta_2(\omega_h)} \bar{\theta}_h = \frac{\chi(\omega_h, \theta_h)}{\omega_h} \bar{\theta}_h$$

$$\dot{\omega}_h^{ref} = -\frac{\chi(\omega_h, \theta_h)}{\omega_h^2} \bar{\theta}_h \dot{\omega}_h$$

con:

$$\chi(\omega_h, \theta_h) = \begin{cases} \frac{k_{chp}}{l_i k_{fhp} \cos \theta_v^0} & \text{if } \omega_h \geq 0, \theta_h \geq 0 \\ \frac{k_{chn}}{l_i k_{fhp} \cos \theta_v^0} & \text{if } \omega_h \geq 0, \theta_h < 0 \\ -\frac{k_{chp}}{l_i k_{fhn} \cos \theta_v^0} & \text{if } \omega_h < 0, \theta_h \geq 0 \\ -\frac{k_{chn}}{l_i k_{fhn} \cos \theta_v^0} & \text{if } \omega_h < 0, \theta_h < 0 \end{cases}$$

y, tomando en cuenta (84), después de realizar algunos cálculos matemáticos:

$$u_h^{ref} = -\frac{\frac{\chi(\omega_h, \theta_h) \bar{\theta}_h}{\omega_h^2} [(a_{11} + \theta_1(\omega_h)) \omega_h + b_1 \Delta u_h] + (a_{11} + \theta_1(\omega_h)) \omega_h^{ref}}{b_1 \left( 1 + \frac{\chi(\omega_h, \theta_h) \bar{\theta}_h}{\omega_h^2} \right)}$$

Con el fin de evaluar la efectividad del controlador LPV basado en el diseño LMI, se consideran tres escenarios de simulación, correspondientes a diferentes valores de  $\bar{\theta}_h$ , comenzando desde la misma condición inicial  $\omega_h(0) = 2 \text{ rad/s}$ ,  $\Omega_h(0) = 1 \text{ rad/s}$  y  $\theta_h(0) = 1 \text{ rad}$ : i)  $\bar{\theta}_h = 0,2 \text{ rad}$ ; ii)  $\bar{\theta}_h = 1 \text{ rad}$ ; y iii)  $\bar{\theta}_h = 1,8 \text{ rad}$ .

Los resultados de simulación obtenidos se muestran en las Figs. 3-5. Como se esperaba, el desempeño del sistema en lazo cerrado aumenta para valores altos de  $\omega_h$ . En la simulación obtenida con  $\bar{\theta}_h = 0,2 \text{ rad}$  (Figura 3), no hay mucha diferencia entre el comportamiento del sistema en lazo cerrado y abierto, ya que los valores tomados por  $\omega_h$  son relativamente pequeños. Por otro lado, en las otras simulaciones (Figs. 4-5), se puede apreciar un aumento visible del desempeño del sistema en lazo cerrado, debido a lo mencionado anteriormente referente a la especificación de diseño de  $\mathcal{D}$ -estabilidad.

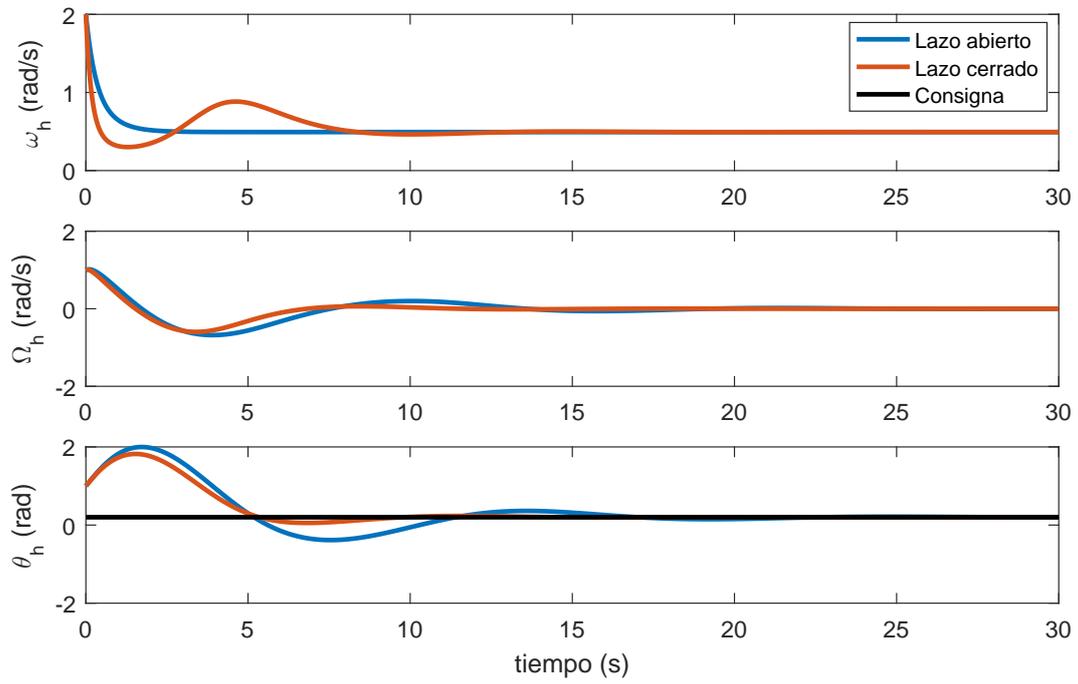


Figura 3: Simulaciones con  $\bar{\theta}_h = 0,2 \text{ rad}$ .

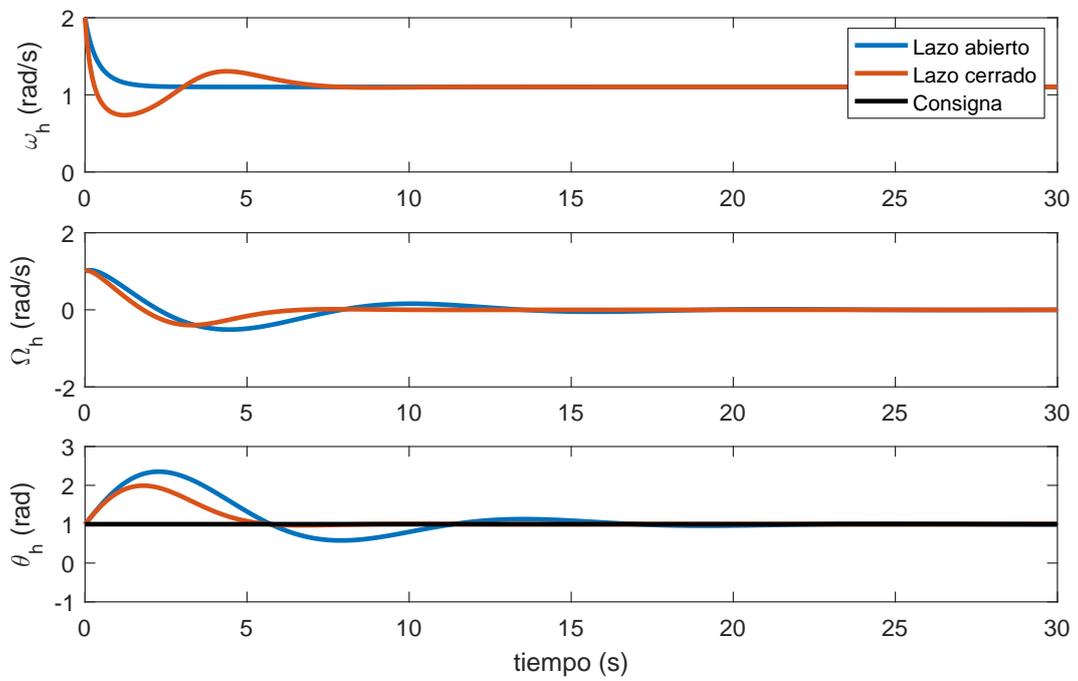


Figura 4: Simulaciones con  $\bar{\theta}_h = 1 \text{ rad}$ .

## 6. Conclusiones

En este artículo se ha presentado un tutorial sobre el análisis y diseño de controladores para sistemas lineales con parámetros variantes (LPV) utilizando desigualdades lineales matriciales (LMIs). El objetivo de este tutorial ha sido mostrar la importancia y utilidad que tienen las LMIs como herramienta que facilita el diseño de controladores para este tipo de sistemas. Por otra parte, se ha detallado paso a paso como aplicar las LMIs del tal forma que puedan ser utilizadas de manera sencilla en cursos académicos y también en diversas investigaciones. Los resultados referentes a las diferentes especificaciones han sido detallados, como la  $\mathcal{D}$ -estabilidad, el desempeño  $\mathcal{H}_\infty$  y el coste cuadrático garantizado. Además se han presentado diferentes estructuras de control, tales como el control por realimentación de estado, el control por realimentación de salida y el control basado en observador. Para ilustrar el uso y aplicación de este enfoque se ha utilizado un ejemplo numérico y el modelo simplificado del TRMS.

En este tutorial no hemos pretendido abarcar toda la teoría existente que hay hoy en día sobre el diseño de sistemas de control LPV utilizando LMIs. Alternativamente, se ha buscado proporcionar un punto de partida para aquellos que deseen acercarse o iniciarse en este campo de investigación, que con el paso del tiempo sigue siendo muy atractivo. Al lector interesado en profundizar en los conceptos detallados en este tutorial, le recomendamos de hacerlo a través de las referencias citadas en este tutorial, y de los libros de texto que tratan acerca de LMIs (Boyd et al., 1994), sistemas LPV (Mohammadpour and Scherer, 2012; Rotondo, 2017) y sistemas borrosos de tipo TS (Tanaka and Wang, 2001). Finalmente, queremos mencionar enfoques alternativos desarrollados recientemente, como por ejemplo el diseño de sistemas de control para sistemas lineales con parámetros variantes inciertos (Daafouz et al., 2008), el control de sistemas LPV a través del marco metodológico propuesto por (Veenman and Scherer, 2014), basado en restricciones cuadráticas integrales (IQC, del inglés *integral quadratic constraints*), o el enfoque poliédrico propuesto por (Ariño et al., 2017), que permite obtener de manera asintótica, conforme un parámetro de Polya aumenta, el dominio de atracción más grande posible.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo de la Agencia Estatal de Investigación (AEI) mediante el sello de excelencia científica María de Maetzu al IRI (ref. MDM-2016-0656), la ayuda Juan de la Cierva-Formación (ref. FJCI-2016-29019), y el apoyo de AEI y del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) a través de los proyectos DEOCS (ref. MINECO DPI2016-76493-C3-3-R) y SCAV (ref. MINECO DPI2017-88403-R).

## Referencias

Abdullah, A., Zribi, M., 2009. Model reference control of LPV systems. *Journal of the Franklin Institute* 346 (9), 854–871.

- Ali, M., Abbas, H., Werner, H., 2010. Controller synthesis for input-output LPV models. In: *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 7694–7699.
- Amato, F., 2006. Quadratic stability. In: *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*. Springer, pp. 31–92.
- Andújar, J. M., Barragán, A. J., 2014. Hibridación de sistemas borrosos para el modelado y control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 11 (2), 127–141.
- Apkarian, P., Gahinet, P., Becker, G., 1995. Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica* 31 (9), 1251–1261.
- Ariño, C., Sala, A., 2007. Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 20 (8), 1036–1046.
- Ariño, C., Sala, A., Pérez, E., Bedate, F., Querol, A., 2017. Asymptotically exact stabilisation for constrained discrete Takagi–Sugeno systems via set-invariance. *Fuzzy Sets and Systems* 316, 117–138.
- Barragán, A. J., Al-Hadithi, B. M., Andújar, J. M., Jiménez, A., 2015. Metodología formal de análisis del comportamiento dinámico de sistemas no lineales mediante lógica borrosa. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 12 (4), 434–445.
- Bernal, M., Guerra, T. M., 2010. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 18 (4), 815–822.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., Jun. 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA.
- Briat, C., 2015. Stability analysis and control of a class of LPV systems with piecewise constant parameters. *Systems & Control Letters* 82, 10–17.
- Brizuela-Mendoza, J., Astorga-Zaragoza, C., Zavala-Río, A., Canales-Abarca, F., 2016. Control tolerante a fallas activo: Estimación y acomodación de fallas en sensores aplicado al modelo LPV de una bicicleta sin conductor. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 13 (2), 174–185.
- Bruzelius, F., Pettersson, S., Breitholtz, C., 2003a. Induced  $l_2$ -gain domain for LPV-gain scheduled control systems. In: *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- Bruzelius, F., Pettersson, S., Breitholtz, C., 2003b. Region of attraction estimates for LPV-gain scheduled control systems. In: *European Control Conference (ECC)*, 2003. IEEE, pp. 892–897.
- Carrillo-Ahumada, J., Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J., García-Alvarado, M., 2015. Sintonización de controladores pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables. aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 12 (2), 177–188.
- Chilali, M., Gahinet, P., 1996.  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on automatic control* 41 (3), 358–367.
- Chilali, M., Gahinet, P., Apkarian, P., 1999. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (12), 2257–2270.
- Daafouz, J., Bernussou, J., Geromel, J. C., 2008. On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (7), 1674–1678.
- Duan, G.-R., Yu, H.-H., 2013. *LMIs in control systems: analysis, design and applications*. CRC press.
- El Ghaoui, L., Niculescu, S.-I., 2000. *Advances in linear matrix inequality methods in control*. SIAM.
- Fernández, A. S., Ruiz, J. J., 1991. Algoritmo del elipsoide interior para programación lineal. *Qüestió: quaderns d'estadística i investigació operativa* 15 (1).
- Gahinet, P., Apkarian, P., Chilali, M., 1996. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic control* 41 (3), 436–442.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., 1993. General-purpose LMI solvers with benchmarks. In: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE, pp. 3162–3165.
- Ghersin, A. S., Peña, R. S., 2002. LPV control of a 6-DOF vehicle. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10 (6), 883–887.
- Ghersin, A. S., Peña, R. S., 2010. Applied LPV control with full block multipliers and regional pole placement. *Journal of Control Science and Engineering* 2010, 3.
- Goebel, R., Hu, T., Teel, A. R., 2006. Dual matrix inequalities in stability and

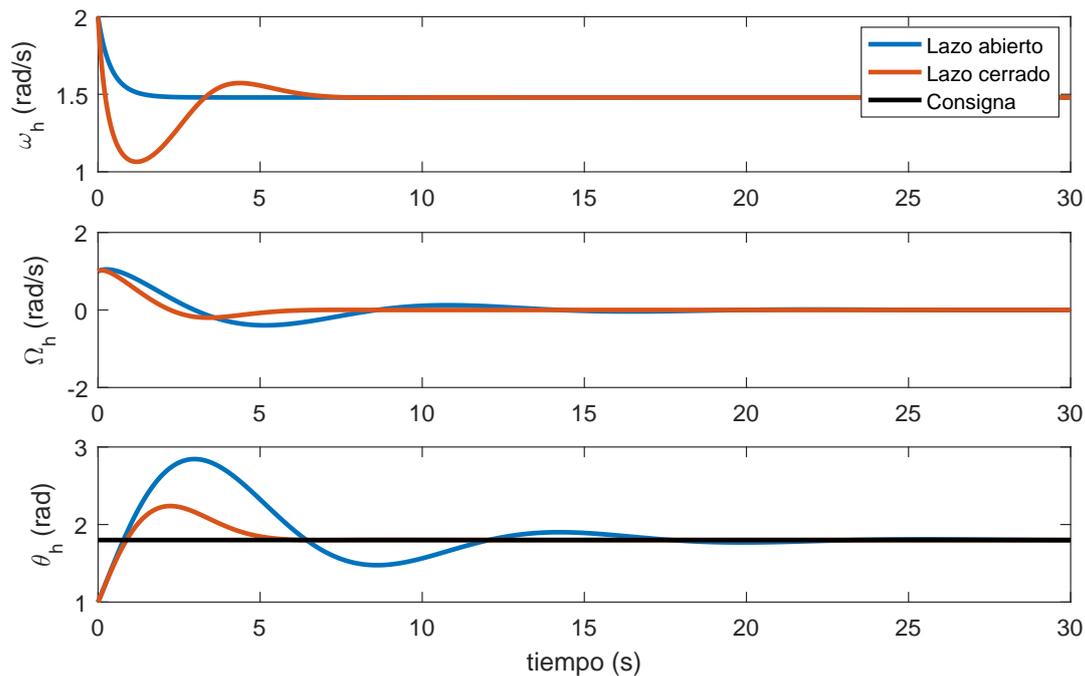


Figura 5: Simulaciones con  $\bar{\theta}_h = 1,8 \text{ rad}$ .

- performance analysis of linear differential/difference inclusions. In: Current trends in nonlinear systems and control. Springer, pp. 103–122.
- Gordillo Álvarez, F., 2009. Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Liapunov. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 6 (2), 5–16.
- Guerra, T. M., Sala, A., Tanaka, K., 2015. Fuzzy control turns 50: 10 years later. *Fuzzy sets and systems* 281, 168–182.
- Guo, L., Wang, H., 2010. Stochastic distribution control system design: a convex optimization approach. Springer Science & Business Media.
- Heemels, W. M. H., Daafouz, J., Millerioux, G., 2010. Observer-based control of discrete-time lpv systems with uncertain parameters. *IEEE transactions on automatic control* 55 (9), 2130–2135.
- Hoffmann, C., Werner, H., 2015. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 23 (2), 416–433.
- Horn, R. A., Horn, R. A., Johnson, C. R., 1990. Matrix analysis. Cambridge university press.
- Isidori, A., Astolfi, A., 1992. Disturbance attenuation and  $H_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE transactions on automatic control* 37 (9), 1283–1293.
- Kose, I. E., Jabbari, F., 1999. Control of lpv systems with partly measured parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (3), 658–663.
- Kruszewski, A., Sala, A., Guerra, T. M., Ariño, C., 2009. A triangulation approach to asymptotically exact conditions for fuzzy summations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17 (5), 985–994.
- Kwiatkowski, A., Boll, M.-T., Werner, H., 2006. Automated generation and assessment of affine LPV models. In: *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 6690–6695.
- Kwiatkowski, A., Werner, H., 2008. PCA-based parameter set mappings for LPV models with fewer parameters and less overbounding. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4 (16), 781–788.
- Lofberg, J., 2004. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*. IEEE, pp. 284–289.
- López-Estrada, F.-R., Ponsart, J.-C., Astorga-Zaragoza, C.-M., Camas-Anzueto, J.-L., Theilliol, D., 2015. Robust sensor fault estimation for descriptor-LPV systems with unmeasurable gain scheduling functions: Application to an anaerobic bioreactor. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 25 (2), 233–244.
- Lu, B., Wu, F., 2004. Switching LPV control designs using multiple parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica* 40 (11), 1973–1980.
- Mohammadpour, J., Scherer, C. W., 2012. Control of linear parameter varying systems with applications. Springer Science & Business Media.
- Nesterov, Y., Nemirovskii, A., 1994. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. SIAM.
- Ostertag, E., 2011. Mono-and multivariable control and estimation: linear, quadratic and LMI methods. Springer Science & Business Media.
- Pandey, A., Sehr, M., de Oliveira, M., 2016. Pre-filtering in gain-scheduled and robust control. In: *American Control Conference (ACC), 2016*. IEEE, pp. 3698–3703.
- Pitarch, J., Sala, A., Ariño, C., Bedate, F., 2012. Estimación del dominio de atracción de sistemas no lineales mediante modelos borrosos polinomiales. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 9 (2), 152–161.
- Pitarch, J. L., Sala, A., Ariño, C., 2014. Polynomial fuzzy systems: Stability and control. In: *Fuzzy Modeling and Control: Theory and Applications*. Springer, pp. 95–115.
- Prajna, S., Papachristodoulou, A., Parrilo, P. A., 2004. SOSTOOLS: sum of squares optimization toolbox for MATLAB - user's guide.
- Rascoñ, R., Álvarez, J., Aguilar, L. T., 2014. Control robusto de posición para un sistema mecánico subactuado con fricción y holgura elástica. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* 11 (3), 275–284.
- Rotondo, D., 2017. Advances in gain-scheduling and fault tolerant control techniques. Springer.
- Rotondo, D., Nejari, F., Puig, V., 2013. Quasi-LPV modeling, identification and control of a twin rotor mimo system. *Control Engineering Practice* 21 (6), 829–846.
- Rotondo, D., Nejari, F., Puig, V., 2014. Robust state-feedback control of uncertain LPV systems: An LMI-based approach. *Journal of the Franklin Institute* 351 (5), 2781–2803.
- Rotondo, D., Nejari, F., Puig, V., 2015a. Design of parameter-scheduled state-feedback controllers using shifting specifications. *Journal of the Franklin Institute* 352 (1), 93–116.
- Rotondo, D., Puig, V., Nejari, F., 2015b. Linear quadratic control of LPV systems using static and shifting specifications. In: *Control Conference (ECC)*,

- 2015 European. IEEE, pp. 3085–3090.
- Rotondo, D., Puig, V., Nejjari, F., 2016. On the analogies in control design of non-linear systems using LPV and Takagi-Sugeno models. In: *Systems and Control (ICSC)*, 2016 5th International Conference on. IEEE, pp. 225–230.
- Rotondo, D., Puig, V., Nejjari, F., Romera, J., 2015c. A fault-hiding approach for the switching quasi-LPV fault-tolerant control of a four-wheeled omnidirectional mobile robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62 (6), 3932–3944.
- Rotondo, D., Puig, V., Nejjari, F., Witczak, M., 2015d. Automated generation and comparison of Takagi–Sugeno and polytopic quasi-LPV models. *Fuzzy Sets and Systems* 277, 44–64.
- Sala, A., 2009. On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Reviews in Control* 33 (1), 48–58.
- Sala, A., Ariño, C., 2008. Relaxed stability and performance LMI conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems with polynomial constraints on membership function shapes. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (5), 1328–1336.
- Sala, A., Ariño, C., 2007. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems* 158 (24), 2671–2686.
- Sala, A., Ariño, C., 2009. Reduciendo distancias entre el control borroso y el control no lineal: luces y sombras. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 6 (2), 26–35.
- Scherer, C. W., 1998. Robust performance analysis for parameter dependent systems using tensor product splines. In: *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*. Vol. 2. IEEE, pp. 2216–2221.
- Scherer, C. W., 2001. LPV control and full block multipliers. *Automatica* 37 (3), 361–375.
- Sehr, M. A., de Oliveira, M. C., 2017. Pre-filtering and post-filtering in gain-scheduled output-feedback  $h_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 27 (16), 3259–3279.
- Shamma, J. S., 1988. Analysis and design of gain scheduled control systems. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Shamma, J. S., 2012. An overview of LPV systems. In: *Control of linear parameter varying systems with applications*. Springer, pp. 3–26.
- Song, B., Hedrick, J. K., 2011. Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems: an LMI approach. Springer Science & Business Media.
- Sturm, J. F., 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software* 11 (1-4), 625–653.
- Sznaier, M., Mazzaro, M. C., 2003. An LMI approach to control-oriented identification and model (in) validation of LPV systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (9), 1619–1624.
- Takagi, T., Sugeno, M., 1993. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. In: *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Elsevier, pp. 387–403.
- Tanaka, K., Taniguchi, T., Wang, H. O., 2000. Generalized Takagi-Sugeno fuzzy systems: rule reduction and robust control. In: *Fuzzy Systems, 2000. FUZZ IEEE 2000. The Ninth IEEE International Conference on*. Vol. 2. IEEE, pp. 688–693.
- Tanaka, K., Wang, H. O., 2001. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. Wiley-Interscience.
- Toh, K.-C., Todd, M. J., Tutuncu, R. H., 1999. SDPT3 - a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software* 11 (1-4), 545–581.
- Trofino, A., de Souza, C., et al., 2001. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (8), 1303–1307.
- Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., Yamamoto, Y., 2001. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems* 9 (2), 324–332.
- Tudon-Martinez, J., Varrier, S., Morales-Menendez, R., Sename, O., 2016. Control tolerante a fallas en una suspensión automotriz semi-activa. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 13 (1), 56–66.
- Veenman, J., Scherer, C. W., 2014. A synthesis framework for robust gain-scheduling controllers. *Automatica* 50 (11), 2799–2812.
- Villafuerte, R., Melo, J. O., 2015. Diseño y sintonización de una ley de control borrosa proporcional retardada: enfoque frecuencial. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 12 (4), 467–475.
- White, A. P., Zhu, G., Choi, J., 2013. Linear parameter-varying control for engineering applications. Springer.
- Witczak, M., Puig, V., Rotondo, D., Witczak, P., 2017. A necessary and sufficient condition for total observability of discrete-time linear time-varying systems. *IFAC-PapersOnLine* 50 (1), 729–734.
- Witczak, M., Rotondo, D., Puig, V., Witczak, P., 2015. A practical test for assessing the reachability of discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute* 352 (12), 5936–5951.
- Wu, F., Dong, K., 2006. Gain-scheduling control of LFT systems using parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica* 42 (1), 39–50.
- Wu, F., Prajna, S., 2005. SOS-based solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis problems. *International Journal of Control* 78 (8), 600–611.
- Wu, F., Yang, X. H., Packard, A., Becker, G., et al., 1996. Induced  $l_2$ -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 6 (9), 983–998.
- Zhou, K., Khargonekar, P. P., 1988. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters* 10 (1), 17–20.