# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al doctor Lluís Ros la labor de dirección y supervisión realizada, sin la cual este trabajo no se hubiera podido llevar a cabo. Quiero expresar mi gratitud, entre otras muchas cosas, por su interés y apoyo incondicional, su altísimo nivel de dedicación, facilitándome todo tipo de recursos, así como por las numerosas y muy formativas discusiones matemáticas y tantas otras no tan matemáticas pero igual de interesantes.

En segundo lugar, quiero mostrar mi agradecimiento al doctor Federico Thomas por su tiempo y apoyo durante la realización de este trabajo, y asimismo, por sus más que interesantes sugerencias y observaciones.

Mi agradecimiento al Instituto de Robótica e Informática Industrial (IRI) por la oportunidad que me ha brindado en la realización de un trabajo de estas características y por proporcionarme los recursos espaciales y materiales necesarios.

Asimismo, quiero expresar mi gratitud a todas aquellas personas que de muy diversas formas me han apoyado y han estado dispuestas a ayudarme. Compañeros del IRI, compañeros de promoción y a algunos de mis exprofesores que han contribuido orientándome con interesantes sugerencias y me han ayudado a aclarar dudas aportándome valiosa información.

Finalmente quiero agradecer muy especialmente a mi familia y amistades más allegadas su apoyo incondicional y constante y la enorme paciencia mostrada durante todo este tiempo.

Gracias a todos.

Francisco José Pérez Calurano

# Índice general

**Agradecimientos** I

**Notación** IV

**Introducción** 1
Objetivo . . . 1
Conocimientos previos . . . 1
Planteamiento . . . 1
Motivación . . . 4
Antecedentes . . . 6
Organización . . . 8

**I Triedrización mediante diagramas de Voronoi** 10

**1. Diagramas de Voronoi** 11
1.1. Definición . . . 11
1.2. Diagramas de Voronoi en $\mathbb{E}^2$ . . . 12
1.3. Construcción de diagramas de Voronoi . . . 13
1.4. Diagramas de Voronoi en $\mathbb{E}^3$ . . . 14
1.5. Triedrizaciones y diagramas de Voronoi . . . 15

**2. Algoritmo de triedrización mediante diagramas de Voronoi** 17
2.1. Algoritmo . . . 17
2.2. Resultados experimentales . . . 21

**II Triedrización por dualidad** 27

**3. Dualidad y polaridad** 28
3.1. Dualidad lineal en $\mathbb{P}^n$ . . . 29
3.1.1. El Principio de Dualidad . . . 29
3.1.2. Correlaciones y polaridades . . . 31
3.2. Polaridad en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ . . . 32
3.2.1. Conceptos y resultados básicos . . . 32
3.2.2. Construcción geométrica de polaridades en el plano . . . 35

3.2.3. Clasificación de polaridades en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ . . . . . 38
3.2.4. Definición alternativa de cónica proyectiva . . . . . 39
3.2.5. Polaridad hiperbólica definida por una cónica proyectiva . . . . . 39
3.3. Polaridad en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ . . . . . 42
3.3.1. Conceptos y resultados básicos . . . . . 42
3.3.2. Clasificación de polaridades en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ . . . . . 42
3.3.3. Definición alternativa de cuádrica proyectiva . . . . . 45
3.4. Tratamiento analítico de las polaridades . . . . . 46
3.4.1. Dualidad desde el punto de vista analítico . . . . . 46
3.4.2. Correlaciones y polaridades . . . . . 49
3.4.3. Polaridades ordinarias en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ . . . . . 52
3.5. Comportamiento afín de las polaridades . . . . . 54

**4. Curvas y superficies polares** **57**
4.1. Cálculo de envolventes . . . . . 57
4.1.1. Envolventes de familias de curvas . . . . . 58
4.1.2. Envolventes de familias biparamétricas de superficies . . . . . 62
4.2. Cálculo efectivo de curvas y superficies polares . . . . . 64
4.2.1. Cálculo de curvas polares en $\mathbb{R}^2$ . . . . . 65
4.2.2. Cálculo la superficies polares en $\mathbb{R}^3$ . . . . . 66

**5. Curvas y superficies de Bézier** **69**
5.1. Polinomios de Bernstein . . . . . 69
5.2. Curvas de Bézier . . . . . 70
5.3. Superficies de Bézier . . . . . 75
5.4. Polar de una curva de Bézier . . . . . 77
5.5. Polar de una superficie de Bézier . . . . . 80

**6. Algoritmo de triedrización por polaridad** **84**
6.1. Algoritmo . . . . . 84
6.2. La aproximación por cuádricas . . . . . 86
6.3. Resultados experimentales . . . . . 87

**Conclusiones y trabajo futuro** **93**

**Anexo** **98**

# Notación

## Espacios

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^n$ | Espacio vectorial de dimensión $n$ sobre el cuerpo de los reales. |
| $\mathbb{E}^n$ | Espacio euclídeo de dimensión $n$. |
| $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ | Espacio afín real de dimensión $n$. |
| $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ | Espacio proyectivo real de dimensión $n$. |
| $\mathbb{R}[x, y]$ | Anillo de polinomios en las variables $x$ e $y$ sobre el cuerpo de los reales. |

## Elementos

| | |
|---|---|
| $P, Q, R, \ldots$ | Puntos de un espacio euclídeo, un espacio afín o un espacio proyectivo. |
| $PQ$ | Recta que pasa por los puntos (diferentes) $P$ y $Q$. |
| $PQR$ | Plano que pasa por los tres puntos (no colineales) $P$, $Q$ y $R$. |
| $L \vee M$ | Variedad lineal generada por las variedades lineales $L$ y $M$. |
| $L \cap M$ | Variedad lineal intersección de las variedades lineales $L$ y $M$ cuando dicha intersección es no vacía. |
| $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ | Planos de un espacio euclídeo, un espacio afín o un espacio proyectivo. |
| $l, m, n, \ldots$ | Rectas de un espacio euclídeo, un espacio afín o un espacio proyectivo. |
| $r \cap s$ | Punto intersección de las rectas (diferentes) $r$ y $s$ en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ cuando dicha intersección es no vacía. |
| $(x_1, \ldots, x_n)$ | Coordenadas de un punto en cierta referencia de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}^n$ o $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$. |
| $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ | Coordenadas de un punto en cierta referencia de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ | Matrices. |
| $\mathbf{A}_{m \times n}$ | Matriz $\mathbf{A}$ de $m$ filas y $n$ columnas. |
| $A_{ij}$ | Elemento $(i, j)$-ésimo de la matriz $\mathbf{A}$. |
| $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}], \ldots$ | Matrices determinadas excepto un factor escalar no nulo, es decir, $[A] = [A']$ si y sólo si existe un escalar no nulo $\lambda$ tal que $A' = \lambda A$. |

## Operadores

| | |
|---|---|
| $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ | Producto de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. |
| $\mathbf{v}^t$ | Traspuesto de un vector. |
| $\mathbf{A}^t$ | Traspuesta de una matriz. |

## Geometría Proyectiva

$P \,\overline{\wedge}\, Q$ Puntos relacionados por una proyectividad.
$P \,\overline{\overline{\wedge}}\, Q$ Puntos relacionados por una perspectividad.

## Geometría Diferencial

$T_P M$ Recta tangente a la curva $M$ en el punto $P \in M$. Si $M$ es una superficie, entonces denota el plano tangente a dicha superficie en el punto $P$. En general supondremos que $M$ es una variedad diferenciable de modo que $T_P M$ está definido para todo $P \in M$.

# Introducción

## Objetivo

El objetivo de este trabajo es desarrollar algoritmos que permitan obtener *aproximaciones poligonales triédricas* de superficies para su aplicación al modelado geométrico de objetos. Tras un examen del estado del arte actual en Geometría Computacional, Modelado Geométrico y otras áreas relacionadas con el tema tratado, se constata que, hasta donde el autor ha podido llegar a conocer, esta es la primera vez que se persigue de forma directa dicho objetivo. Ello hace que el trabajo presentado tenga un carácter exploratorio o incluso especulativo en determinados aspectos. En este sentido, ha sido necesaria una labor previa de recopilación de resultados de Geometría Lineal, Computacional y Diferencial que constituyen las bases sobre las que descansan los dos algoritmos de triedrización propuestos. En esta memoria se presentan cada uno de estos algoritmos, su implementación y resultados, así como la base teórica previa sobre la cual se fundamentan.

## Conocimientos previos

Se asume que el lector tiene conocimientos básicos de Álgebra Lineal, Análisis y de Geometría Afín, Euclídea y Proyectiva. También es necesaria cierta familiaridad con la descripción y manipulación de curvas y superficies. Finalmente, se utilizan algunas nociones muy elementales de Grafos, Topología y Geometría Diferencial, aunque no son imprescindibles para el correcto seguimiento de la exposición.

## Planteamiento

Habitualmente, en el modelado geométrico de superficies se emplean métodos basados en la utilización de mallas poligonales y, muy particularmente, de un subconjunto de éstas, las mallas triangulares. El presente trabajo considera una tipología de mallas complementaria a las triangulaciones que proporciona, además de buenas propiedades en cuanto a la reducción de la información a almacenar para su visualización, un tipo de descripción que, en esencia, captura la forma de la superficie descrita [Ros, 2000].

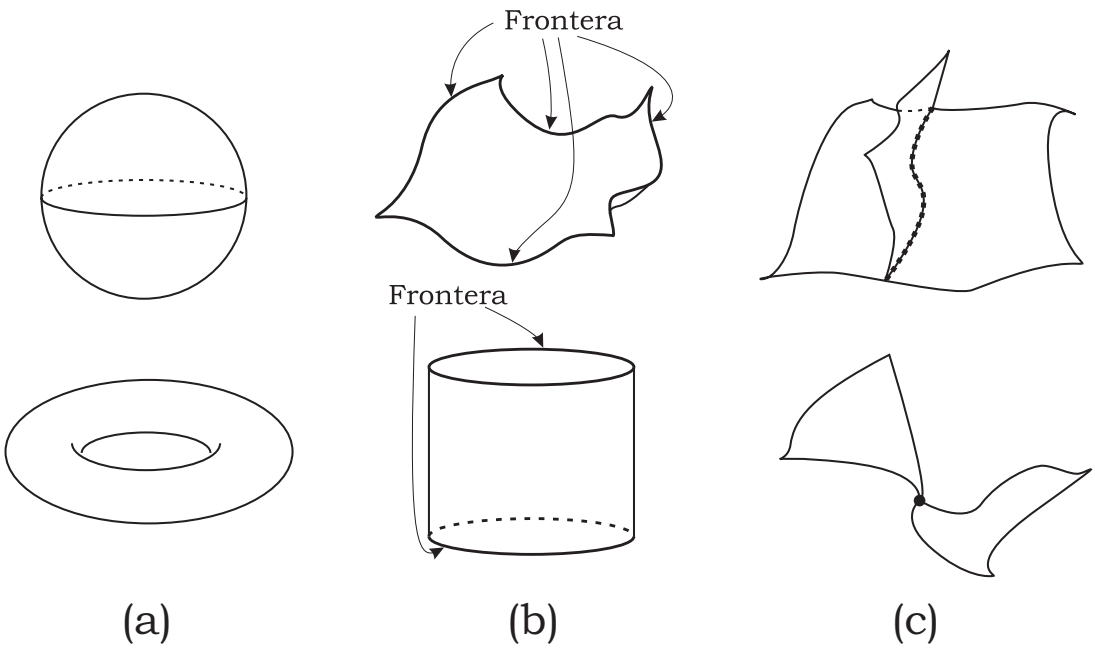



Figura 1: Ejemplos de: (a) Superficies sin frontera. (b) Superficies con frontera. (c) Superficies no consideradas en este trabajo.

El término *superficie* utilizado a lo largo de esta memoria hace referencia a cualquier variedad topológica de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$, con o sin frontera y, generalmente, diferenciable. Adicionalmente, para fijar ideas, supondremos que dicha variedad es conexa y orientable. El concepto de *variedad topológica de dimensión dos* utilizado hace referencia a los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ en los que todo punto $P$ tiene un entorno topológicamente equivalente a un disco abierto de $\mathbb{R}^2$ o bien a un abierto de $H^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 \geq 0\}$. Véase [do Carmo, 1990, Boothby, 1986] o cualquier otro libro de Geometría Diferencial para una definición más detallada de los conceptos expuestos. Cabe señalar la distinción entre *superficies con frontera* y las que carecen de ella, tal y como se muestra gráficamente en la Figura 1. Asimismo, teniendo en cuenta los propósitos descriptivos de este trabajo, a menudo emplearemos descripciones paramétricas de las superficies tratadas, lo cual nos permitirá manipular sus puntos de forma rápida y sencilla.

Por otra parte, una *malla poligonal* en $\mathbb{R}^3$ es una superficie lineal a trozos formada por una colección finita de polígonos planos sin autointersecciones, unidos dos a dos entre sí a través de sus aristas y/o vértices. Llamamos *caras*, *aristas* y *vértices* de la malla poligonal, a los respectivos polígonos, aristas y vértices que la forman. En este trabajo tratamos básicamente con dos tipos de mallas poligonales:

- ***Mallas triangulares.*** Malla poligonal en la que todas sus caras son triángulos.
- ***Mallas triédricas.*** Malla poligonal en la que cada vértice interior es incidente a exactamente tres caras.

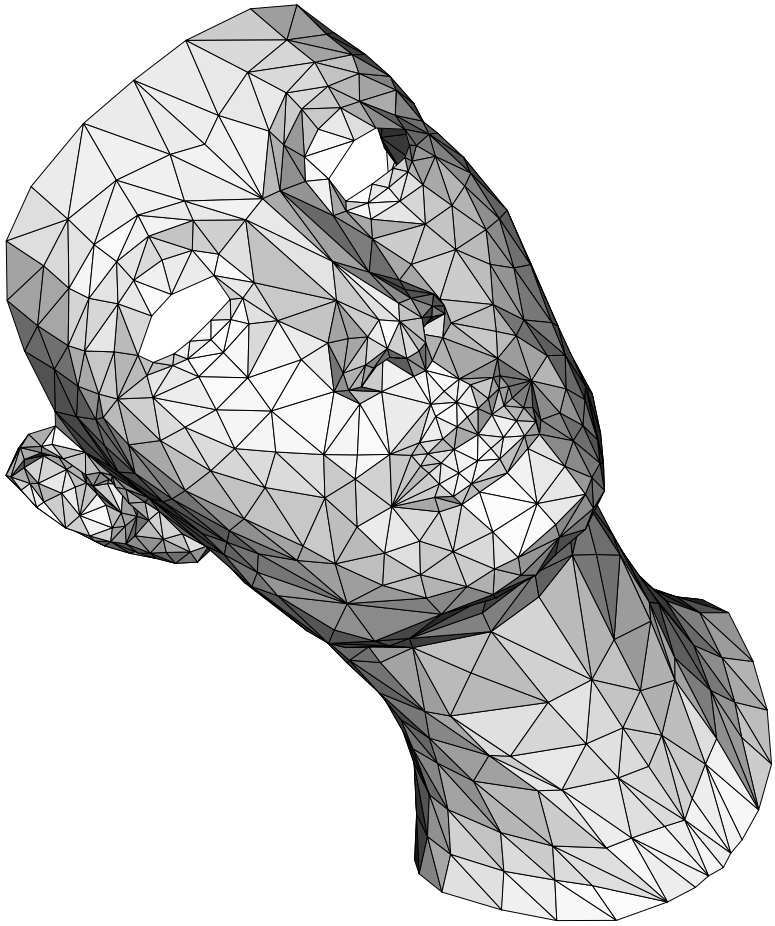


Figura 2: Triangulación de la cara de Nefertiti.

Una *poligonización* $\mathcal{MP}$ de una superficie dada $S$ es una aproximación de ésta mediante una malla poligonal en base a algún criterio que permita determinar su grado de ajuste. Un *método de poligonización* es un algoritmo capaz de construir poligonizaciones de superficies. Los conceptos de *triangulación* y *triedrización* son análogos. La precisión de la aproximación dependerá tanto de las características del método de poligonización —número de polígonos, criterio para medir el error de aproximación— como de las particularidades de la superficie a aproximar. Asimismo, el criterio de ajuste puede basarse en un juicio puramente visual o incorporar algún tipo de medida que permita calcular una cota de error para determinar la precisión con la que la malla y la superficie coinciden. En general, nos proponemos obtener aproximaciones que converjan al modelo a medida que el número de polígonos utilizados aumenta[1]; es decir, métodos cuyo error asociado es cero en el límite. Concretamente, el objetivo es desarrollar métodos que permitan obtener aproximaciones de superficies que cumplan los siguientes requerimientos:

[1]En general, un incremento en el número de polígonos no necesariamente implica un decrecimiento monótono del error [Seibold y Wyvill, 1998].

***R1*** ***Topología de malla poligonal.*** *Se desea que la aproximación conserve la misma topología que la superficie a aproximar. Puesto que este trabajo se centra en poligonalizar variedades 2-dimensionales, este requerimiento se traduce en pedir que la aproximación resultante tenga la estructura de una malla poligonal—sin autointersecciones en sus caras, ni de la malla consigo misma.*

***R2*** ***Estructura triédrica.*** *Requeriremos que todo vértice interior a la malla sea incidente a exactamente tres caras.*

La elección de una medida de error para el cálculo del error de aproximación de una poligonización es complejo dada la multitud de patologías que puede presentar la superficie a aproximar (ver [Seibold y Wyvill, 1998]). De forma intuitiva, se proponen la siguientes condiciones adicionales:

***R3*** ***Aproximación de la superficie de entrada.*** *Pediremos que la máxima distancia entre un punto de la triedrización y el punto de la superficie más cercano a éste tienda a cero a medida que aumentamos el número de polígonos utilizados.*

***R4*** ***Orientación de las normales.*** *Deseamos que el ángulo máximo entre el vector normal en un punto de la triedrización y el vector normal en el punto más cercano de la superficie tienda a cero al aumentar el número de polígonos utilizados.*

## Motivación

La extensa bibliografía existente sobre triangulaciones deja constancia de su enorme importancia como herramienta en la aproximación de superficies. Los motivos son muy diversos y responden tanto a razones de índole geométrica como computacional y del *hardware* diseñado para su manipulación efectiva. Entre otras, se pueden destacar las siguientes propiedades:

- ***Consistencia espacial***
  En el espacio tridimensional tres puntos escogidos arbitrariamente siempre son coplanares. Además, si estos no están alineados, determinan un único triángulo. Esto no ocurre así con el resto de polígonos, puesto que cuatro, cinco o más puntos en el espacio no siempre son coplanares, y por tanto, no siempre pueden determinar un polígono plano.

- ***Simplicidad y adaptabilidad***
  La sencillez en la descripción de un triángulo mediante sus tres vértices unida a su consistencia espacial y a la gran cantidad de propiedades conocidas permiten crear mallas triangulares sin las dificultades inherentes a la utilización de cualquier otra clase de polígonos.

- ***Visualizado***
  Actualmente, la gran mayoría del *hardware* diseñado para visualizar superficies está preparado para la manipulación de triángulos.

- ***Coloreado***
  El uso de triangulaciones permite esquemas fáciles de coloreado de superficies.

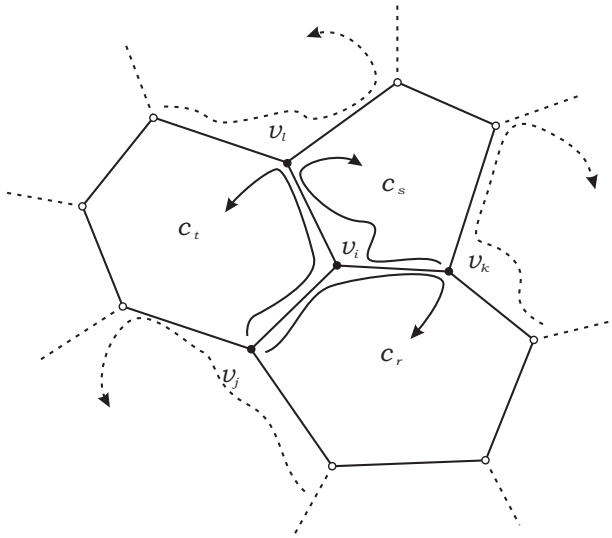



Figura 3: Esquema de propagación en una malla triédrica.

Por otra parte, la elección de las triedrizaciones como herramienta alternativa para la aproximación de superficies responde, básicamente, a la necesidad de usar aproximaciones que combinen una descripción sencilla unida a una reducción en el volumen de datos a almacenar.

La idea que permite satisfacer tales objetivos se basa en la capacidad que tienen dichas aproximaciones para capturar y resumir la información necesaria para describir una superficie 3D. Ello es posible gracias a la siguiente propiedad, según la cual, es posible determinar la coordenada $z$ de todos los vértices a partir de sus coordenadas $x$ e $y$, y de la coordenada $z$ de cuatro de ellos, previamente escogidos.

En efecto, dada una malla triédrica, sea $V_i$ uno cualquiera de sus vértices interiores, $V_j$, $V_k$ y $V_l$ sus tres vértices vecinos y $C_r$, $C_s$ y $C_t$ sus tres caras adyacentes. La configuración que se obtiene al proyectar este trozo de malla sobre el plano $xy$[2] tiene una apariencia similar a la de la Figura 3. Las letras minúsculas hacen referencia a los elementos proyectados en dicho plano. Puesto que tres vértices no alineados determinan un plano, conociendo las coordenadas $z$ de $V_i$, $V_j$ y $V_k$, se puede calcular el plano de la cara $C_r$, que a su vez determina la altura de los demás vértices en esta cara. Este mismo procedimiento se puede repetir para obtener las coordenadas $z$ de los vértices de las caras $C_s$ y $C_t$, creándose un esquema de propagación que determina el resto de coordenadas $z$ de la triedrización. De esta forma, como sólo se necesitan cuatro coordenadas $z$ para determinar el resto, la información numérica que hemos de almacenar para describir la aproximación triédrica de cierta superficie se reduce aproximadamente en un tercio.

[2]Según la definición de malla poligonal, simpre podemos conseguir una referencia en la cual esto se pueda llevar a cabo.

En resumen, las propiedades que hacen atractivo el uso de triedrizaciones para el modelado de superficies son las siguientes:

- ***No-redundancia.*** Ofrecen una descripción no redundante de la malla que representan, ya que se almacenan únicamente las alturas imprescindibles para determinar la totalidad de la aproximación.
- ***Consistencia.*** Se asegura una visualización consistente puesto que los vértices de una misma cara son coplanares al ser calculadas sus alturas a partir de las de cuatro vértices predeterminados, en lugar de ser un *input* necesario. Esto hace que estas alturas sean insensibles a fuentes externas de error al no requerirse su transmisión al dispositivo de visualización.
- ***Compresibilidad de los datos.*** En contraposición a las mallas triangulares, sólo se necesita la altura de cuatro vértices para determinar el resto de coordenadas $z$ de los vértices de la malla.

## Antecedentes

Una de las dificultades de este proyecto ha sido la carencia de trabajos existentes que hicieran referencia al tema tratado. Tres son los documentos básicos a los que se ha tenido acceso.

En [Ros, 2000] se plantea la resolución del problema basándose en la propiedad según la cual todos los puntos generados por la intersección de una configuración[3] de planos en posición general son intersección de, exactamente, tres de ellos, es decir, se verifica la condición de malla triédrica. A partir de esta idea, dada una superficie, lo primero que se hace es escoger una muestra de puntos sobre ésta. A continuación se calculan los planos tangentes en cada uno de estos puntos, generando así una configuración de planos en posición general. Finalmente sólo queda extraer las caras adecuadas de entre todas las generadas por esta configuración de planos de manera que se obtenga la triedrización buscada. La dificultad fundamental de este método reside en este último paso. Para pedazos de superficie que son concavos o convexos este método es muy efectivo, puesto que en estos casos la envolvente inferior – respectivamente superior – de la configuración de planos nos selecciona las caras adecuadas, proporcionando así la aproximación deseada. Para afrontar el caso general se plantea descomponer la superficie en pedazos dependiendo del tipo de puntos que contiene cada uno de ellos para, a continuación, triedrizar cada pedazo por separado. Sin embargo, el problema queda sin solución cuando se trata de aplicar dicho método en zonas con puntos hiperbólicos dónde las curvaturas principales tienen signos opuestos, puesto que se desconoce como extraer las caras necesarias de entre todas las posibles.

En segundo lugar, en [Andújar, 1999] se utiliza la dualidad estructural entre triangulaciones y triedrizaciones para crear una triedrización partiendo de una triangulación.

[3] Nota de traducción: el vocablo 'configuración' se usa en esta memoria con el mismo significado que la palabra 'arrangement' en inglés y hace referencia a un conjunto arbitrario de objetos iguales. Se utiliza, fundamentalmente, para designar conjuntos de puntos, rectas o planos.

Se trata, básicamente, de utilizar el comportamiento dual entre los diferentes elementos que componen cada malla poligonal; vértices, aristas y regiones poligonales. En efecto, consideremos una malla triangular arbitraria y sea $G = (V, A)$ el grafo que representa su 1-esqueleto, donde $V$ y $A$ son, respectivamente, el conjunto de vértices y aristas de la misma. Consideraremos también, como parte de la estructura, el conjunto $R$ de las caras poligonales de la malla en cuestión. En una malla triangular, $R$ consta únicamente de triángulos. Notaremos la estructura resultante por $E = (V, A, R)$. La estructura combinatoria dual es el resultado de asociar un vértice a cada cara, conectando aquellos vértices cuyas caras asociadas son adyacentes, del mismo modo en que se construye el grafo dual de un grafo plano. Dado que en una triangulación cada triángulo interior es adyacente exactamente a tres triángulos, el grafo que representa el 1-esqueleto dual, $G^*$, asociado a $E$ en la forma descrita, es 3-regular, característica propia de una triedrización. Todos nuestros problemas estarían resueltos si el conjunto $R^*$ de regiones duales, obtenidas según el procedimiento anterior, fueran polígonos planos. Sin embargo, esto en general no ocurre y depende de la situación del vértice que asociemos a cada uno de los triángulos de la malla triangular original.

En su tesis, C. Andújar, que utiliza el incentro de cada triángulo como elección del dual de éste, comenta esta circunstancia y resuelve parcialmente el problema planteando una solución que, mediante la utilización de operaciones locales en elementos de la malla, permite acotar globalmente el nivel de no planaridad de las caras. Teniendo en cuenta que los objetivos de su trabajo están orientados a la visualización de escenas, este método le supone una alternativa más a tener en cuenta, además de las triangulaciones y los modelos de volumen basados en *octrees*. Un ejemplo del tipo de aproximaciones que se obtienen se muestra en la Figura 4.

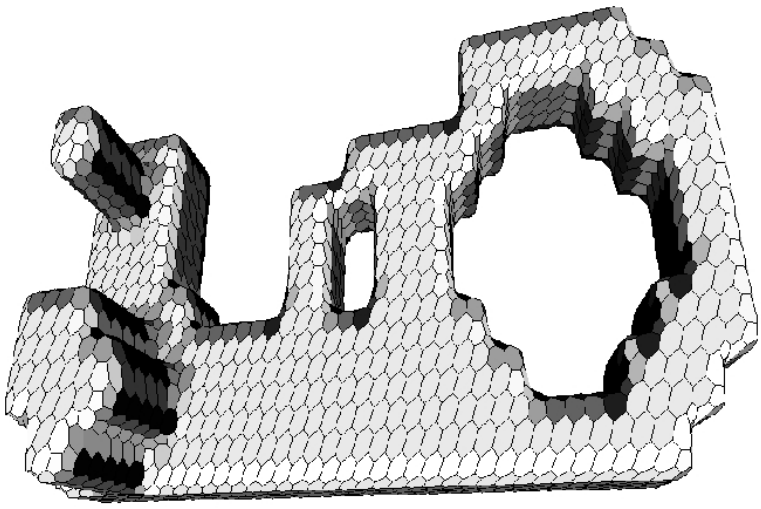


Figura 4: Triedrización de una superficie con caras no planas obtenida a partir de una triangulación uniendo los incentros de cada triángulo.

Finalmente, en [Delingette, 1994] se presenta un algoritmo de reconstrucción de superficies basado en mallas triédricas sin caras planas, a las que se hace referencia con el nombre de *simplex meshes*. Este tipo de reconstrucciones cuenta con buenas propiedades tanto para la adecuación a la topología de la superficie como para el detallado en la geometría local de la misma. Para el tratamiento de éstas, este trabajo presenta la definición, estructura y propiedades de las mallas triédricas en relación a las de una malla triangular de un modo similar al presentado en [Andújar, 1999]. Sin embargo, como se ha dicho, en el tipo de triedrizaciones que se trata tampoco se tiene en cuenta la planaridad de las regiones encerradas por las aristas de la misma. Es más, interesa obtener mallas con regiones curvas que aproximen propiedades como la curvatura de la superficie de forma similar a como se utilizan los splines. En este sentido, las triedrizaciones utilizadas y las triangulaciones sólo comparten la dualidad en la estructura 1-dimensional o 1-esqueleto, del mismo modo en que se relacionan la de un grafo plano y su correspondiente grafo dual.

## Organización

El resto de la memoria está estructurada en dos partes, correspondientes a las dos vías de ataque contempladas para resolver el problema planteado. Mientras que en la primera parte las triedrizaciones se obtienen utilizando propiedades de los diagramas de Voronoi 3D, en la segunda se utilizan las propiedades de las polaridades para esta finalidad. A continuación se presenta una breve descripción de cada capítulo:

El **Capítulo 1** introduce los diagramas de Voronoi, presentando las definiciones básicas y realizando un breve repaso de las características y propiedades más interesantes de esta estructura geométrica.

En el **Capítulo 2** se expone el primer método empleado para obtener una triedrización de una superficie, utilizando para ello las propiedades de los diagramas de Voronoi. En este sentido, han sido de gran utilidad tanto el paquete *Qhull* como el visualizador de modelos 3D, *Geomview*. Asimismo, se presentan algunos resultados experimentales que ponen de manifiesto las principales características del método empleado.

Las correlaciones proyectivas, y más concretamente el estudio de las polaridades, son el centro de atención del **Capítulo 3**. Estas nociones son fundamentales para el desarrollo, en los Capítulos 4, 5 y 6, de un método de triedrización alternativo al propuesto en el capítulo anterior.

La extensión del concepto de figura dual a curvas y superficies suaves más generales es el objetivo principal del **Capítulo 4**, en el cual, también se introducen las herramientas necesarias para su cálculo efectivo.

En el **Capítulo 5** se aplican los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4 para obtener la expresión del *parche polar* de un parche de Bézier.

El **Capítulo 6** presenta el segundo método de triedrización estudiado en este trabajo y que se fundamenta en las propiedades del fenómeno de la dualidad. Cierran el capítulo algunos ejemplos de cálculo que permiten analizar las principales patologías que presenta el método.

Las conclusiones extraidas y una reflexión acerca del enorme trabajo que aún queda por realizar ponen fin a la memoria.

# Parte I

# Triedrización mediante diagramas de Voronoi

# Capítulo 1

# Diagramas de Voronoi

Los diagramas de Voronoi son una estructura geométrica cuya importancia dentro de la Geometría Computacional queda patente por su gran versatilidad y riqueza. Entre sus diversos campos de aplicación encontramos la Biología, la Física, la Robótica o la Cristalografía. Su principal característica es la de almacenar información referente a distancias respecto de un conjunto de objetos para ser consultada, posteriormente, de forma sencilla y computacionalmente eficiente. En las siguientes secciones se exponen las características y propiedades más importantes de esta estructura geométrica, prestando especial atención a los casos 2-dimensional y 3-dimensional.

## 1.1. Definición

Un diagrama de Voronoi es una descomposición en celdas definida respecto de un conjunto finito de objetos en un espacio euclídeo. Cada celda del diagrama corresponde a un objeto del conjunto y contiene todos los puntos para los cuales dicho objeto es el más próximo o tiene una influencia dominante en algún sentido. De forma precisa, se tiene la siguiente

**Definición.** Sea $S$ un conjunto finito de subconjuntos de $\mathbb{E}^n$ que llamaremos *sitios*[1]. Para cada $s \in S$ sea $d_s$ una aplicación de $\mathbb{E}^n$ en los reales positivos; diremos que $d_s(P)$ es la *función distancia de* $s$. El conjunto $\{P \in \mathbb{E}^n \mid d_s(P) \leq d_t(P),\ t \in S - \{s\}\}$ es la *celda Voronoi* de $s$. El *diagrama de Voronoi* de $S$, *Vor(S)*, es la descomposición en celdas de $\mathbb{E}^n$ definida por las celdas Voronoi de todos los subconjuntos de $S$.

En muchos casos y en el nuestro propio, los sitios son puntos y $d_s(P)$ es una función distancia entre un punto $s \in S$ y otro punto $P$ de $\mathbb{E}^n$. Habitualmente se toma $d_s(P) = d(s, P)$, donde $d$ designa la distancia euclídea habitual de $\mathbb{E}^n$.

[1] Nota de traducción: el vocablo 'sitio' se usa en esta memoria con el mismo significado que la palabra 'site' en inglés.

## 1.2. Diagramas de Voronoi en $\mathbb{E}^2$

Sea $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ un conjunto de $n$ puntos diferentes del plano en posición general, esto es, de manera que nunca cuatro de ellos son cocirculares. Sabemos que el diagrama de Voronoi de $S$, es la descomposición en $n$ celdas del plano, una por cada sitio de $S$, cuya propiedad es que un punto $Q$ pertenece a la celda correspondiente al sitio $P_i$ si y sólo si $d(Q, P_i) \leq d(Q, P_j)$, $\forall P_j \in S,\ j \neq i$, donde $d$ designa la distancia euclídea habitual en el plano $\mathbb{E}^2$. La celda correspondiente a $P_i$ la denotaremos por $\mathcal{V}(P_i)$ y diremos que es el *polígono de Voronoi*[2] *de* $P_i$, esto es, $\mathcal{V}(P_i) = \{Q \in \mathbb{E}^2 \mid d(Q, P_i) \leq d(Q, P_j)\ \forall j \neq i\}$. Notemos que $\mathcal{V}(P_i)$ puede ser no acotado. Llamamos *vértices Voronoi* y *aristas Voronoi* a cada uno de los vértices y aristas de los polígonos Voronoi que forman el diagrama. La Figura 1.1 muestra un ejemplo de un diagrama de Voronoi en el plano.

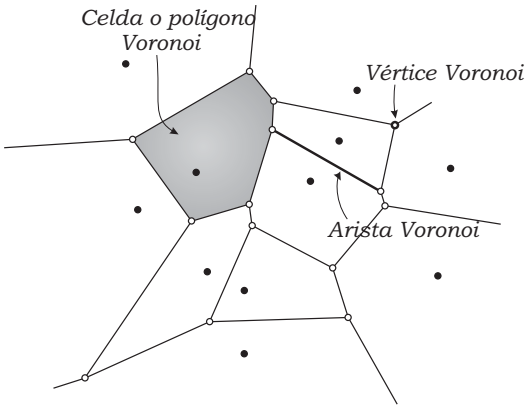



Figura 1.1: Diagrama de Voronoi de 11 sitios.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades más importantes de los diagramas de Voronoi 2D. El lector podrá encontrar las respectivas demostraciones, así como otras propiedades, en algunas publicaciones de carácter general sobre Geometría Computacional (véase [Edelsbrunner, 1987], [Preparata y Shamos, 1985] o [Okabe y col., 2000]).

1. *Cada vértice Voronoi es la intersección de, exactamente, tres aristas Voronoi.*

2. *Para todo punto $P_i \in S$, $\mathcal{V}(P_i)$ es un 2-polítopo, posiblemente no acotado.*

3. *Si $P_j$ es el sitio más cercano a $P_i$, $\mathcal{V}(P_j)$ y $\mathcal{V}(P_i)$ comparten una arista.*

4. *La complejidad de un diagrama de Voronoi en el plano es lineal en el número de sitios. Concretamente, si $n$ es el número de sitios, $n \geq 3$, el diagrama de Voronoi tiene como máximo $3n - 6$ aristas y $2n - 4$ vértices.*

[2] También llamado "*dominio de Dirichlet*", "*polígono de Thiessen*" o "*región de Wigner-Seitz*".

## 1.3. Construcción de diagramas de Voronoi

Sea $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ un conjunto de $n$ puntos diferentes del plano euclídeo, $n \geq 2$, en las condiciones de la sección anterior. En esta sección se muestra una manera de calcular el diagrama de Voronoi de dichos puntos. En efecto, consideremos el paraboloide elíptico unidad $\mathcal{P}$ en $\mathbb{E}^3$, cuya ecuación en una referencia ortonormal es

$$z = x^2 + y^2,$$

y matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean $P_i$ y $P_j$ con $i \neq j$, dos puntos de $S$ de coordenadas $(a_i, b_i)$ y $(a_j, b_j)$ en cierta referencia ortonormal de $\mathbb{E}^2$. Identifiquemos el plano en el que se encuentran los puntos de $S$ con el plano de ecuación $\{z = 0\}$ de $\mathbb{E}^3$ de modo que $P_i$ y $P_j$ se identifican con $P_i'$ y $P_j'$ con coordenadas $(a_i, b_i, 0)$ y $(a_j, b_j, 0)$ respectivamente. Consideremos ahora el plano $\pi_i$, tangente al paraboloide en el punto de $\mathbb{E}^3$ de coordenadas $(a_i, b_i, a_i^2 + b_i^2)$, proyección vertical de $P_i'$ sobre el paraboloide $\mathcal{P}$. La ecuación de dicho plano puede obtenerse usando la matriz de la cuádrica de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ a_i^2 + b_i^2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Operando, la ecuación del plano $\pi_i$ buscada es

$$z = 2a_i x + 2b_i y - a_i^2 - b_i^2.$$

Calculemos ahora la distancia entre la proyección vertical del punto $P_j'$ sobre el plano $\pi_i$ y la proyección vertical del mismo punto sobre el paraboloide $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} d_v &= (a_j^2 + b_j^2) - 2a_i a_j + 2b_i b_j - a_i^2 - b_i^2 \\ &= a_j^2 + b_j^2 - 2a_i a_j + 2b_i b_j - a_i^2 - b_i^2 \\ &= (a_j - a_i)^2 + (b_j - b_i)^2. \end{aligned}$$

Observemos que el resultado es justamente el cuadrado de la distancia entre los sitios $P_i'$ y $P_j'$ (ver Figura 1.2).

El resultado anterior también es cierto en cualquier dimensión, seleccionando en cada caso la hipersuperficie de segundo grado adecuada ($x_{n+1} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ en $\mathbb{E}^{n+1}$). Esto nos proporciona una forma de obtener el diagrama de Voronoi de un conjunto de $n$ puntos en dimensión arbitraria. En $\mathbb{E}^2$ por ejemplo, todo punto de una de las caras de la envolvente superior de los planos tangentes al paraboloide elíptico se proyecta verticalmente sobre puntos cuyo sitio más cercano es, en virtud de la propiedad vista, el que genera el plano tangente que contiene dicha cara de la envolvente. En otras palabras, se proyecta sobre el polígono Voronoi del sitio en cuestión. Veamos el algoritmo en $\mathbb{E}^2$:

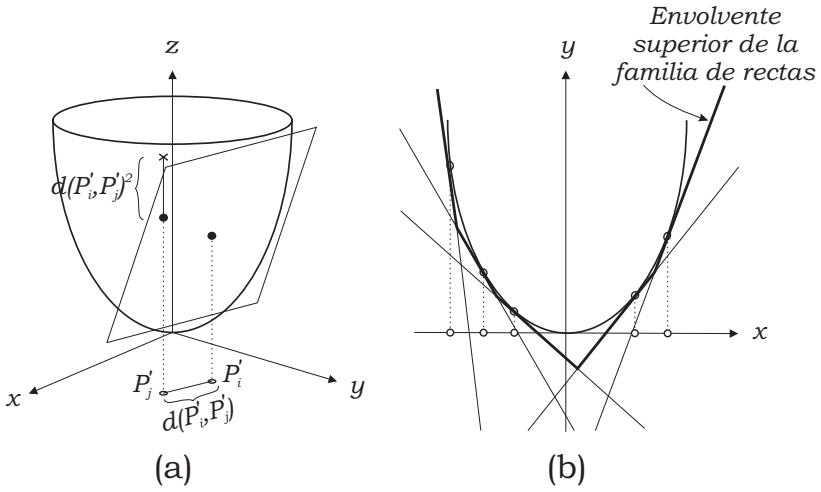



Figura 1.2: (a) Propiedad del paraboloide para el caso 2D. (b) Envolvente superior de una familia de rectas (aplicación de la propiedad análoga para el caso 1D).

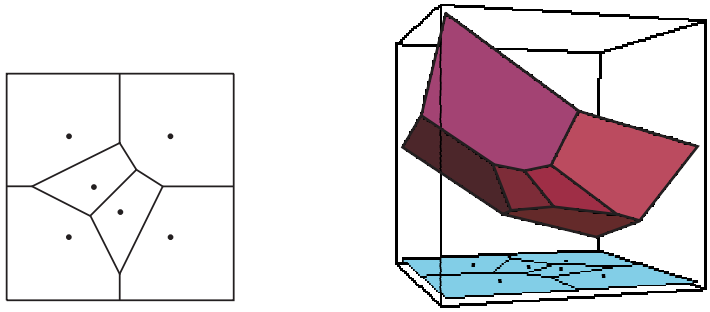
**Construcción del diagrama de Voronoi 2D de n puntos.**

**Entrada.** $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, *n puntos del plano en posición general.*
**Salida.** *Diagrama de Voronoi.*

1. *Identificar el plano* $\mathbb{E}^2$ *con el plano de* $\mathbb{E}^3$ *de ecuación* $\{z = 0\}$ *y proyectar los n puntos verticalmente sobre el paraboloide elíptico de ecuación* $z = x^2 + y^2$, *obteniendo un conjunto* $\overline{S}$ *de n puntos sobre dicho paraboloide.*
2. *Calcular el plano tangente al paraboloide en cada uno de los puntos de* $\overline{S}$, *obteniendo así una configuración de n planos* $\mathcal{A}$.
3. *Calcular la envolvente superior de la configuración de planos (Figura 1.2).*
4. *La proyección de dicha envolvente sobre el plano de ecuación* $\{z = 0\}$ *proporciona el diagrama de Voronoi buscado.*

## 1.4. Diagramas de Voronoi en $\mathbb{E}^3$

Las definiciones son análogas al caso 2-dimensional salvo que ahora, una *celda Voronoi* es una región 3-dimensional. Más concretamente, se trata de un 3-polítopo posiblemente no acotado, como ya sucedía en $\mathbb{E}^2$ (vease Figura 1.4). Por otra parte, seguimos teniendo *vértices Voronoi*, *aristas Voronoi* y además, *caras Voronoi*. En este caso, decir que los sitios del conjunto $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ están en posición general significa que nunca cinco de ellos son coesféricos. Asimismo, el diagrama de Voronoi de $S$ puede obtenerse de modo análogo a como se ha hecho en el caso plano, esto es, utilizando una hipersuperficie cuadrática adecuada en $\mathbb{E}^4$.



(a) (b)

Figura 1.3: Diagrama de Voronoi (a) obtenido a partir de la envolvente convexa sobre el paraboloide elíptico (b).

Las siguientes propiedades son análogas a las de los diagramas de Voronoi 2D:

1. *Cada vértice Voronoi es la intersección de, exactamente, cuatro aristas Voronoi.*
2. *Para todo punto $P_i \in S$, $\mathcal{V}(P_i)$ es un 3-polítopo posiblemente no acotado.*
3. *Si $P_j$ es el sitio más cercano a $P_i$, $\mathcal{V}(P_j)$ y $\mathcal{V}(P_i)$ comparten una cara, es decir, un polígono (acotado o no).*
4. *De acuerdo con las fórmulas presentadas en [Okabe y col., 2000] el máximo número, $n_{max}(d)$, de caras Voronoi d-dimensionales de un diagrama de Voronoi 3-dimensional generado por $n$ sitios diferentes, $n \geq 4$, viene dado por las expresiones siguientes:*

$$n_{max}(d) = \begin{cases} C(3,4), & d = 0 \\ C(3-d,4), & 1 \leq d \leq 3 \end{cases}$$

*donde*

$$C(j,4) = \sum_{i=1}^{2} \frac{n}{i} \binom{n-i-1}{i-1} \binom{i}{j-i+1},$$

*es decir, $\frac{n(n-3)}{2}$ vértices, $n(n-3)$ aristas y $\frac{n(n-1)}{2}$ caras.*

## 1.5. Triedrizaciones y diagramas de Voronoi

Notemos que, en virtud de la Propiedad 1 de la Sección 1.2, un diagrama de Voronoi en el plano constituye el ejemplo más sencillo de una superficie triedrizada. De hecho, una triedrización de una superficie es otra superficie que consta de polígonos "enganchados" de tal forma que la estructura global podría recordar a un diagrama de Voronoi 2D. Esto sugirió la busqueda de diagramas de Voronoi sobre superficies genéricas y crear así triedrizaciones sin caras planas. A continuación la estrategia pasaba por utilizar dicha aproximación para construir una segunda triedrización con caras planas que aproximara lo mejor posible la superficie tratada. Resultados en esta dirección sobre la esfera se

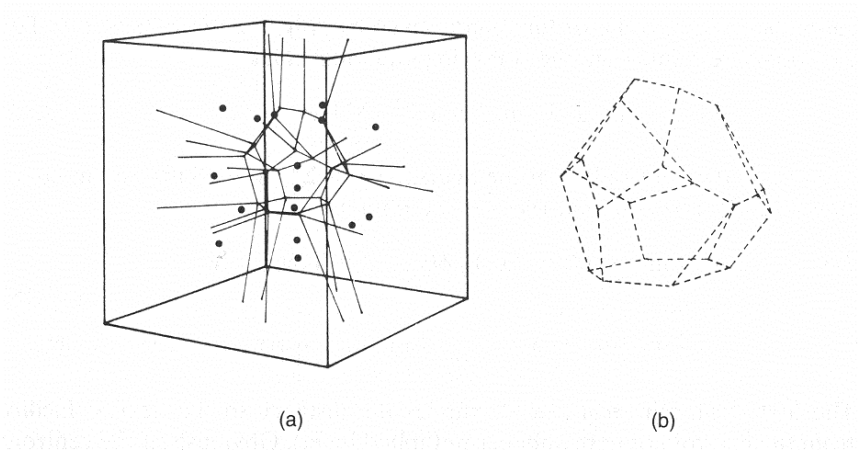



Figura 1.4: Diagrama de Voronoi 3D de 16 sitios.

recogen en [Fox y Joy, 1998]. En este artículo, se utiliza una técnica denominada *cutting corners* para obtener, de hecho, una triedrización de la esfera. La proyección de los vértices obtenidos sobre dicha esfera da lugar a un diagrama de Voronoi 2D sobre ésta. Sin embargo, la dificultad de tratar con las particularidades de superficies arbitrarias complicaba en exceso el problema y se desechó esta idea. No obstante, como veremos en el capítulo siguiente, los diagramas de Voronoi 3D sí se pueden utilizar como base para calcular aproximaciones triédricas de superficies.

# Capítulo 2

# Algoritmo de triedrización mediante diagramas de Voronoi

Este capítulo describe el primer método de triedrización explorado, basado en la construcción del diagrama de Voronoi de una nube de puntos distribuidos alrededor de la superficie a aproximar. Dicho método se inspira en el presentado en [Ros y col., 2002], aunque en este caso el uso de diagramas de Voronoi facilita la extracción de las caras de la poligonización. Este algoritmo genera mallas poligonales cuyos vértices convergen a la superficie de entrada a medida que aumenta el número de polígonos utilizado, si bien no se obtiene el mismo comportamiento en cuanto a la orientación de los vectores normales se refiere. Ello ha motivado un ataque alternativo al problema cuya exposición es el objeto de posteriores capítulos.

## 2.1. Algoritmo

El algoritmo utilizado consta de los siguientes pasos, resumidos en el pseudocódigo de la Figura 2.4 y que describimos a continuación, donde $S$ denota la superficie input a aproximar.

**Paso 1. Generación de una muestra de puntos.** En primer lugar se muestrea la superficie $S$, colocando aleatoriamente puntos sobre ésta con densidad proporcional a su curvatura, obteniendo de esta forma una nube de puntos que denotaremos por $\mathcal{MS}$.

**Paso 2. Obtención de las nubes generadoras.** A continuación, los puntos de $\mathcal{MS}$ se utilizan para generar dos nubes de puntos adicionales, $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$, situadas una a cada lado de la superficie. Los puntos de cada una de estas nuevas nubes se encuentran a una misma distancia $d$ con respecto a la superficie $S$. Se han considerado dos maneras de obtener $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$, ilustradas, en el caso 2D, en la Figura 2.1.

**a. Muestras asimétricas.**
Se substituye cada punto $P$ de $\mathcal{MS}$ por un punto $P'$ situado a distancia $d$ de $P$, sobre la normal a $S$ en $P$. Aleatoriamente se decide en qué lado de $S$ se coloca este nuevo punto. De este modo, las nubes de puntos $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ están formadas por

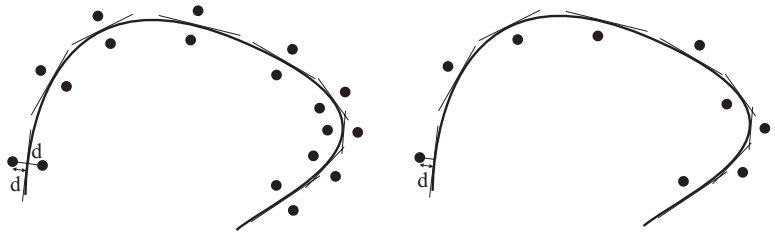



Figura 2.1: Muestras simétrica (izquierda) y asimétrica (derecha) en una curva plana.

los puntos en el lado exterior e interior de $S$, respectivamente. Asimismo, la distancia $d$ debe ser lo suficientemente pequeña como para garantizar que el segmento abierto $\overline{PP'}$ no atraviesa la superficie $S$.

**b. Muestras simétricas.**
A diferencia del caso anterior, se substituye cada punto $P$ de $\mathcal{MS}$ por dos puntos, $P^+$ y $P^-$, uno en cada lado de $S$, también sobre la recta normal a $S$ en $P$ y a distancia $d$ de $P$. Las nubes $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ están formadas, respectivamente, por los puntos $P^+$ y $P^-$ obtenidos de esta manera. De forma análoga, la distancia $d$ debe ser tal que el segmento $\overline{P^+P^-}$ atraviese $S$ exactamente una vez.

**Paso 3. Obtención del diagrama de Voronoi.** Una vez obtenidas las nubes $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$, se calcula el diagrama de Voronoi 3D de los puntos generadores formados por la reunión de ambas nubes. Cada uno de ellos proporciona una celda de Voronoi en el diagrama, esto es, un poliedro convexo, posiblemente no acotado.

**Paso 4. Extracción de caras válidas.** A continuación, se eliminan los vértices, aristas y regiones 3-dimensionales que no pertenecen a la estructura 2-dimensional formada por las caras que aproximan a $S$. Dicha selección se realiza considerando válida toda cara del diagrama en la que los dos sitios vecinos pertenecen a $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$, respectivamente. La idea es clara cuando las muestras son simétricas. En efecto, si $d$ es suficientemente pequeña y exceptuando patologías concretas, aparecerá una cara entre cada dos puntos, $P^+$ y $P^-$, de las muestras $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ respectivamente. Tal y como se han elegido dichos puntos y debido a las propiedades de los diagramas de Voronoi, muchas de estas caras aproximan el plano tangente a $S$ en $P \in \mathcal{MS}$. Es aquí donde aparecen las similitudes con el método de los planos tangentes mencionado en la Sección de Antecedentes. La diferencia es que la obtención de la configuración de planos se hace vía diagramas de Voronoi, previa eliminación del resto de planos no válidos. Por otra parte, no debemos olvidar que entre las caras válidas también se encuentran aquellas correspondientes a puntos que, pese a no estar asociados al mismo punto muestra en $\mathcal{MS}$, si que pertenecen a nubes diferentes, es decir, a $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ respectivamente.

**Paso 5. Corrección local.** La poligonización generada después de aplicar el paso anterior sólo contiene vértices de grado tres o cuatro. Esto es debido a las propiedades de los diagramas de Voronoi 3D, en virtud de las cuales no es posible obtener vértices con grado mayor a cuatro a menos que existan grupos de cinco sitios coesféricos. Pero esto, si

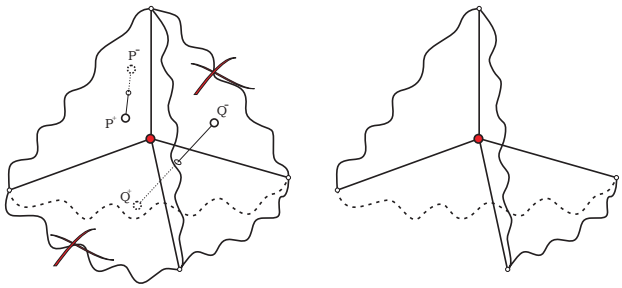



Figura 2.2: Configuración de puntos que provoca la aparición de un vértice no triédrico al aplicar el criterio de extracción de caras. Las cruces indican las caras que no son seleccionadas por dicho criterio y que, por tanto, no aparecen en la poligonización resultante.

se diera el caso, se evita realizando pequeñas perturbaciones en las nubes de puntos obtenidas según lo expuesto en el Paso 1. La Figura 2.2 muestra un caso donde, tras aplicar el Paso 3, se obtiene un vértice con cuatro caras incidentes. Es posible, entonces, substituir cada vértice de grado cuatro por varios vértices de grado tres a fin de obtener una malla totalmente triédrica. Esto se logra mediante la utilización de operaciones locales que involucran un cambio en la estructura de las caras y aristas incidentes con el vértice en cuestión. Se trata de realizar secciones en torno al mismo que permitan reconstruir la malla manteniendo la regularidad en el grado de los nuevos vértices obtenidos a la vez que se corrige el grado del vértice incorrecto. Además, la casuística se reduce al tratamiento de sólo dos casos, ambos ilustrados en la Figura 2.3 y en la que también se muestra el tipo de sección a aplicar en cada uno de ellos.

- ***Vértices separables.*** Vértices separables de los cuatro vértices vecinos mediante un plano (arriba).
- ***Vértices de ensilladura.*** Vértices cuyo entorno es homeomorfo a una superficie de ensilladura (abajo).

En cuanto a la complejidad del algoritmo, notemos que en el primer paso hemos de seleccionar $n$ puntos muestra sobre la superficie, lo cual se puede realizar en tiempo $\mathcal{O}(n)$. El mismo esfuerzo ha de realizarse para obtener las nubes de puntos generadores. A continuación, el cálculo del diagrama de Voronoi de un máximo de $2n$ puntos en $\mathbb{R}^3$ se puede llevar a cabo en tiempo $\mathcal{O}(n\, log\, n)$. El cuarto paso se basa en el recuento de caras válidas para nuestra aproximación. Teniendo en cuenta que el número de caras Voronoi en un diagrama de Voronoi 3D es, a lo sumo, de $\frac{n(n-1)}{2}$ y que el recuento de caras válidas pasa por comprobar todas ellas, esto arroja una complejidad del Paso 4 en tiempo $\mathcal{O}(n^2)$. Finalmente, la corrección local, que para cada vértice se realiza en tiempo constante, habrá que aplicarla a un máximo de $\mathcal{O}(n^2)$ vértices, con lo cual el tiempo en realizar este paso es también cuadrático. Así, el algoritmo completo tiene una complejidad de $\mathcal{O}(n^2)$.

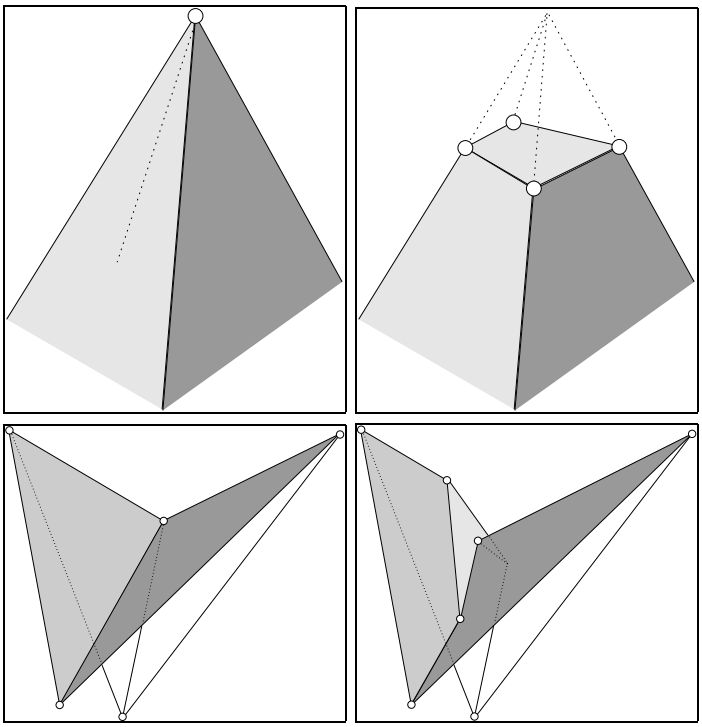


Figura 2.3: Operaciones locales sobre vértices convexos de grado cuatro (arriba) y sobre vértices de ensilladura de grado cuatro (abajo).

**Algoritmo de triedrización mediante diagramas de Voronoi**

**Entrada:** *La superficie $S$ a triedrizar. Puede ser descrita a través de una parametrización o usando una aproximación mediante una triangulación de ésta.*

**Salida:** *Triedrización de la superficie $S$.*

**Paso 1.** *Generación de una muestra aleatoria de puntos $\mathcal{MS}$ de $S$.*

**Paso 2.** *Obtención de dos nubes de puntos generadores, $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$, equidistantes sobre la normal a la muestra $\mathcal{MS}$ de puntos.*

**Paso 3.** *Cálculo del diagrama de Voronoi del conjunto de sitios formado por la reunión de puntos de las dos nubes calculadas en el Paso 2.*

**Paso 4.** *Eliminación de los vértices, las aristas y las regiones del diagrama de Voronoi que no forman parte de la estructura 2-dimensional que aproxima la superficie original $S$.*

**Paso 5.** *Correción, mediante operaciones locales, de vértices con grado 4 y perturbación de posibles vértices de grado 5.*

Figura 2.4: Algoritmo de triedrización mediante diagramas de Voronoi.

## 2.2. Resultados experimentales

El anterior algoritmo ha sido implementado en C hasta el Paso 3. Para llevar a cabo algunos de los cálculos se ha utilizado el paquete de rutinas *Qhull*, que permite obtener envolventes convexas de nubes de puntos así como diagramas de Voronoi, triangulaciones de Delaunay y otras estructuras geométricas. Este paquete implementa el algoritmo denominado *"QuickHull"* [Barber y col., 1996] para el cálculo de la envolvente convexa, y posteriormente lo utiliza para obtener el diagrama de Voronoi mediante el algoritmo del paraboloide explicado en el capítulo anterior.

La obtención de los resultados que se presentan, pasan, en primer lugar, por realizar un muestreo de la superficie a aproximar. Para ello resulta muy cómodo usar una descripción paramétrica de ésta, si bien, en caso de no disponer de dicha parametrización, también es útil el uso de una triangulación. Así, los resultados que se muestran a continuación se basan en el muestreo de la superficie a partir de una triangulación de la misma.

La Figura 2.5 (a) muestra un ejemplo de superficie triangulada como modelo para aplicar el algoritmo descrito utilizando un muestreo asimétrico en el Paso 2. En este ejemplo, las nubes de puntos $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ se obtienen utilizando, como muestra $\mathcal{MS}$, la formada por un único punto situado en el baricentro de cada uno de los triángulos. En la Figura 2.5 (b) se pueden apreciar las nubes $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ resultantes. La Figura 2.5 (c) muestra la aproximación que resulta de aplicar el algoritmo de triedrización anterior hasta el Paso 3. Como podemos apreciar en las ampliaciones mostradas en la Figura 2.6, se obtiene una poligonalización con vértices de grado tres o cuatro. Notemos que, a pesar de no haberse aplicado el Paso 4 del algoritmo, este experimento permite detectar ya ciertas patologías no deseadas respecto del resultado esperado:

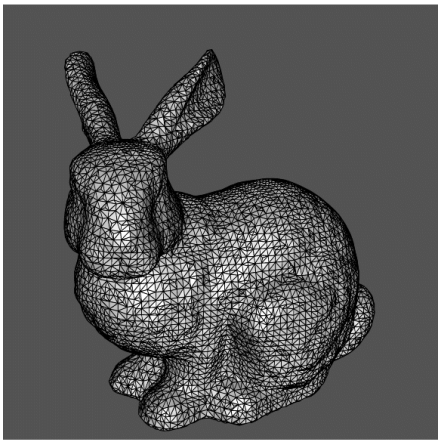
- ***Dientes de sierra.*** La primera es la aparición de irregularidades en forma de dientes de sierra y protuberancias que encontramos en muchas zonas de la triedrización. Obsérvese, por ejemplo, el rizado en la superficie de la orejas en la Figura 2.6, centro, o la existencia de caras no acotadas en la Figura 2.5 (c). Esto se debe, en parte, al tipo de muestreo utilizado, puesto que pueden existir zonas donde el número de puntos de alguna de las muestras no sea el adecuado. En otras palabras, que el cociente entre el número de puntos en una muestra con respecto al número de puntos en la otra diste mucho de uno.

- ***Islas poliédricas.*** Por otra parte, este tipo de muestreo puede producir islas poliédricas, separadas de la poligonización principal. Obsérvese, por ejemplo, la celda poliédrica aislada entre las dos orejas, en la Figura 2.6, centro. Pese a que el caso 3D es más complejo, la analogía con el caso 2D permite ilustrar ciertos comportamientos comunes. La Figura 2.7 muestra ambas patologías en el caso 2D.

Para mejorar este tipo de aproximaciones se apuntan varias ideas. La primera de ellas no es más que el incremento de la densidad de muestreo. El objetivo es aumentar la resolución de la aproximación para producir una atenuación de los picos y de los dientes de sierra. Otra opción consiste en producir un esquema pseudo-aleatorio para evitar la concentración descompensada de puntos de una misma nube en determinadas zonas. Dicho

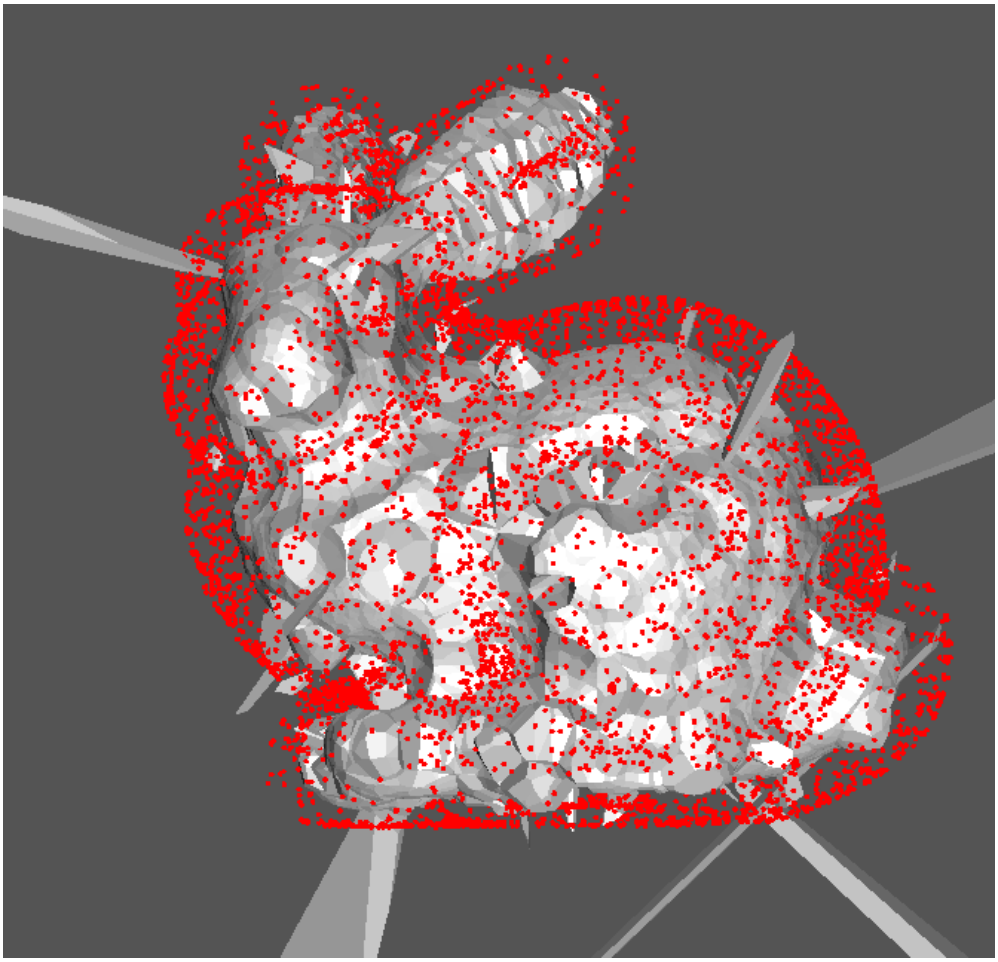
de otra forma, se fuerza a que el cociente entre el número de puntos de una de las nubes con respecto a la otra no se aleje demasiado de uno, no sólo globalmente, sinó también de forma local. Adicionalmente, también es posible evitar la aparición de dientes de sierra realizando un muestreo simétrico. En general, las pruebas realizadas en el caso simétrico generan aproximaciones con propiedades similares a las obtenidas en el caso asimétrico; si bien, los resultados son, en efecto, más suaves al reducirse el efecto de dientes de sierra presente en el caso asimétrico. La Figura 2.7 ilustra dos de las soluciones aplicadas para mejorar los resultados que se obtienen mediante un muestreado asimétrico. Sin embargo, con un muestreo simétrico se viola la propiedad de aproximación de las normales debido a la aparición de pequeños saltos en diversos puntos de la malla obtenida, en ocasiones, casi paralelos a la orientación de la normal en la superficie original (véase el zoom de las tres regiones preseleccionadas en la Figura 2.8).

Por otra parte, pese a que no se ha presentado un estudio de la influencia que tiene la elección de la distancia $d$ usada para construir $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$, los resultados obtenidos muestran que es un factor a tener en cuenta, más cuando se trata con superficies con curvaturas muy pronunciadas en las que existen diferente partes, cercanas en distancia euclídea, aunque alejadas, considerando la distancia entre ellas sobre la superficie.



(a)

(b)



(c)

Figura 2.5: Modelado de la forma de un conejo mediante una triangulación (a) y muestras asimétricas $\mathcal{MS}^+$ y $\mathcal{MS}^-$ obtenidas a partir de la misma (b). Triedrización del modelo anterior después de aplicar el Paso 3 (c).

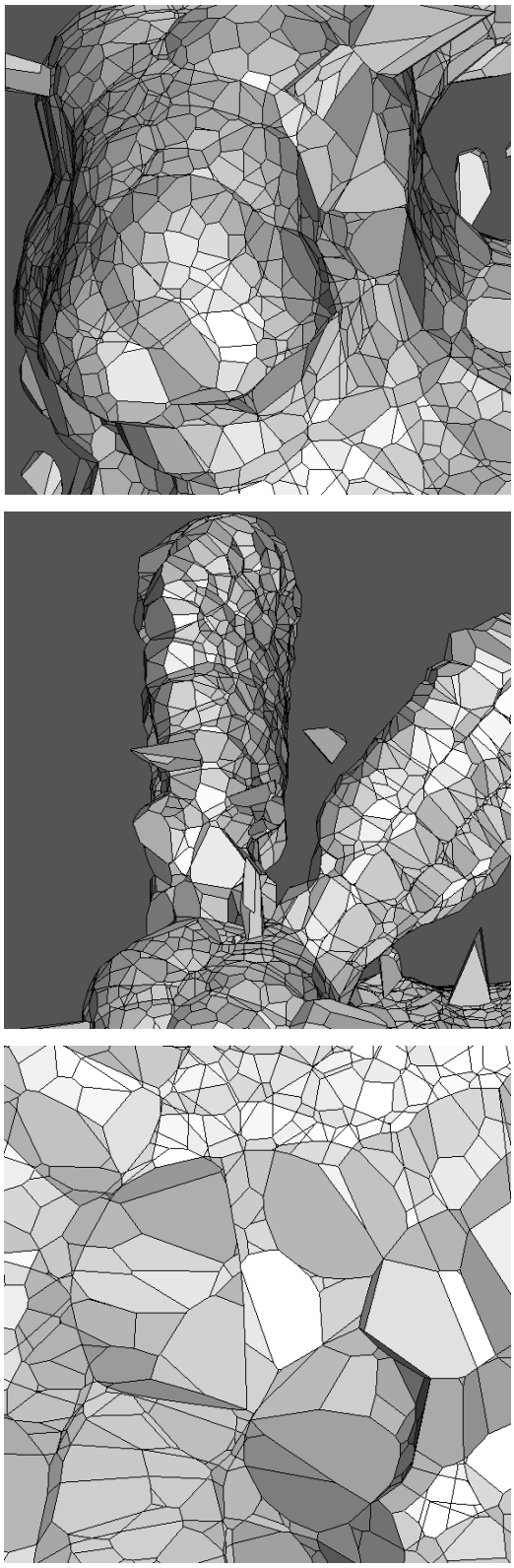


Figura 2.6: Detalle de la triedrización obtenida.

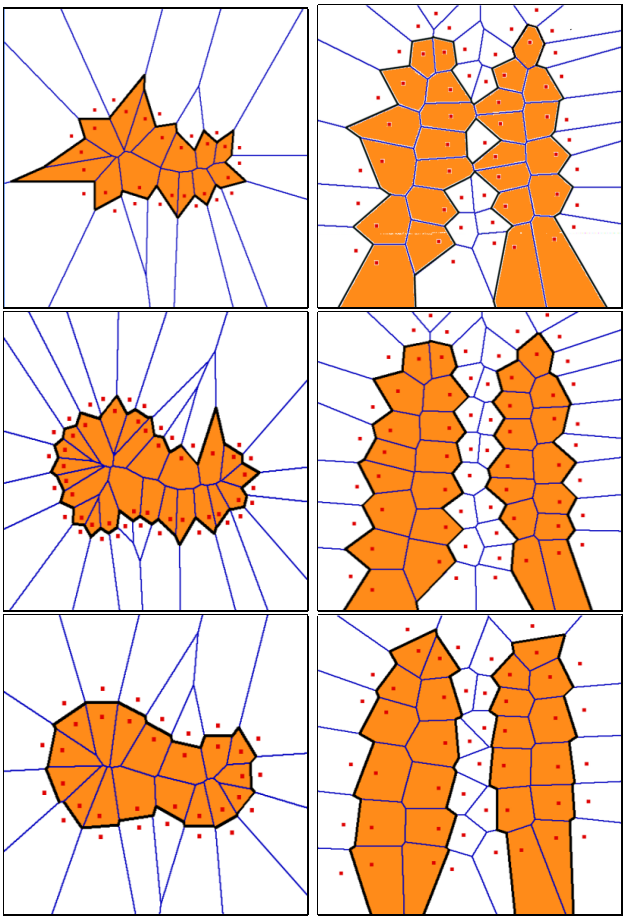


Figura 2.7: Arriba: patologías que aparecen cuando se usa un muestreado asimétrico. Centro: solución mediante un muestreado asimétrico más denso. Abajo: solución mediante un muestreado simétrico.

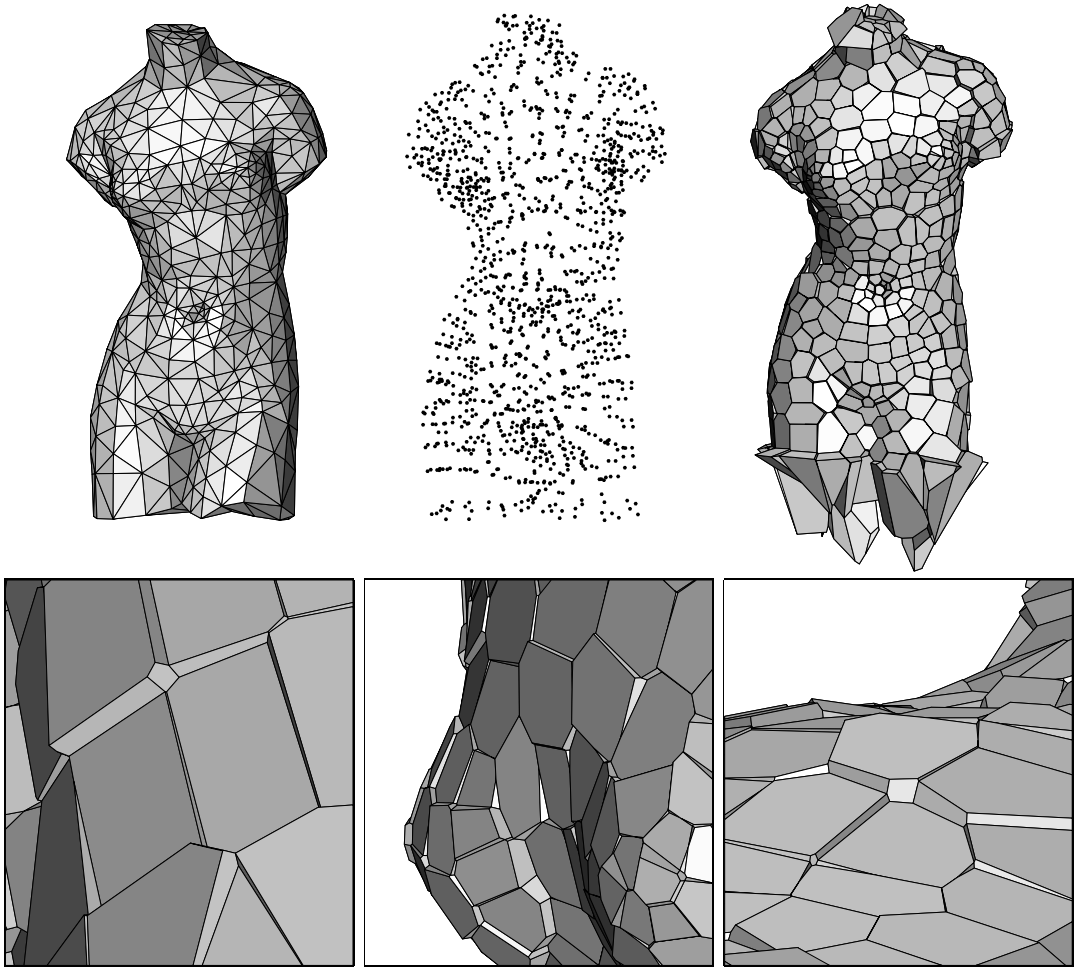


Figura 2.8: Arriba: un modelo triangulado de una Venus (izquierda) es muestreado simétricamente (centro) para obtener una malla triédrica (derecha). Abajo: zoom de tres áreas preseleccionadas en las que se pueden observar caras casi paralelas a la orientación de la normal en la superficie original.

# Parte II

# Triedrización por dualidad

# Capítulo 3

# Dualidad y polaridad

*"¿Qué habremos de pensar de la pregunta: es verdadera la geometría Euclidiana? Carece de sentido. Lo mismo haríamos al preguntar... si son verdaderas las coordenadas cartesianas y falsas las polares. Una geometría no puede ser más verdadera que otra; sólo más conveniente."*

Henri Poincaré (1854-1912)

Resultados como los que se presentan en la tesis doctoral [Andújar, 1999], muestran como el mero uso de la estructura combinatoria de los elementos que intervienen en una triedrización nos limita en la consecución de nuestro objetivo. Esto obliga a sumergirse en un contexto, a priori más completo, en el que, como era de esperar, se conceda a la geometría un papel tan importante como el que tiene la estructura combinatoria de la poligonización que buscamos. Sin embargo, nos surge la duda al tratar de elegir la geometría adecuada en la que se enmarca nuestro problema teniendo en cuenta sus características.

Por una parte, no cabe duda de que la existencia de una métrica juega un papel muy destacable. Esto es así en aplicaciones como pueden ser, por ejemplo, el diseño de vehículos o la confección de mapas geográficos. Sin embargo, la Geometría Métrica, al igual que la Geometría Afín carecen, en primera instancia, de la simetría necesaria que requiere el problema y que permite obtener de forma sencilla la estructura combinatoria que deseamos. Por otra parte, esta simetría aparece de forma natural, como advirtió por primera vez Poncelet, en la Geometría Proyectiva y se manifiesta en el denominado *Principio de Dualidad*. Ahora bien, la Geometría Proyectiva carece por completo de conceptos métricos, con lo cual, lo que hemos ganado por una parte lo perdemos por otra. No obstante, el espacio euclídeo se puede considerar englobado dentro del espacio proyectivo [Coxeter, 1957] y esto quizá nos proporcione una estrategia a seguir. En efecto, aprovechando las características que nos ofrece cada geometría, se trata, en primer lugar, de estudiar las propiedades de la Geometría Proyectiva que tienen relación con la estructura combinatoria buscada para, a continuación, ver que ocurre con estas nociones bajo la óptica euclídea o si es posible adaptar los resultados para aprovechar las principales características de ambas geometrías.

En la siguiente sección estudiaremos el fenómeno de la *dualidad*, que se manifiesta en lo que se conoce como *Principio de Dualidad*. Asimismo, definiremos dos tipos de transformaciones proyectivas, las *correlaciones* y las *polaridades* que permiten establecer relaciones biyectivas entre elementos duales del espacio proyectivo. A continuación, en las Secciones 3.2 y 3.3, nos centraremos en el estudio y clasificación de las polaridades, que constituyen una de las herramientas básicas sobre la que se basa el *Triedrización por Dualidad*. La Sección 3.2 tratará las polaridades en el plano proyectivo real mientras que el caso espacial será desarrollado en la Sección 3.3. En la Sección 3.4 se abordan las polaridades desde el punto de vista analítico, proporcionando las herramientas algebraicas necesarias para su tratamiento efectivo. Finalmente, en la Sección 3.5 se aborda, de forma breve, el estudio del comportamiento de dichas polaridades en el plano y espacio afín.

## 3.1. Dualidad lineal en $\mathbb{P}^n$

### 3.1.1. El Principio de Dualidad

El concepto de *dualidad* es una noción muy utilizada en muchas ramas de las matemáticas, aunque quizá sea más conocida en el ámbito de la Geometría. La *dualidad geométrica* fue descubierta a comienzos del siglo $XIX$, en medio de las rivalidades existentes entre partidarios de la Geometría Analítica y de la Geometría Sintética. De hecho, fue Charles Julien Brianchon (1785-1864) quién, mediante un simple intercambio de las palabras punto y recta, mostró de forma sintética el primer ejemplo claro de un par de importantes teoremas duales en el plano, los teoremas de Pascal y de Brianchon, ilustrados en las Figuras 3.1 y 3.2.

**Teorema de Pascal** *Un hexágono está inscrito en una cónica si, y sólo si, los tres puntos comunes a los tres pares de lados opuestos están alineados.*

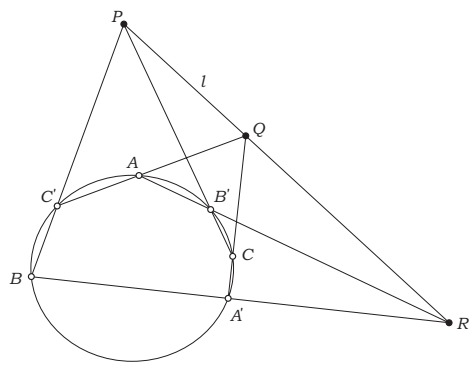



Figura 3.1: Teorema de Pascal.

**Teorema de Brianchon** *Un hexágono está circunscrito en una cónica si, y sólo si, las tres rectas que unen los tres pares de vértices opuestos son concurrentes.*

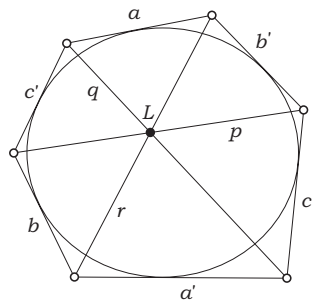



Figura 3.2: Teorema de Brianchon.

Notemos que, efectivamente, si leemos la frase «una recta es tangente a una cónica» como «una recta está sobre una cónica», entonces podemos enunciar los dos teoremas de la siguiente forma combinada:

*Los seis* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{vértices} \\ \textit{lados} \end{array} \right.$ *de un hexágono están sobre una cónica si, y sólo si, los(las) tres* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{puntos} \\ \textit{rectas} \end{array} \right.$ *comunes a los tres pares de* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{lados} \\ \textit{vértices} \end{array} \right.$ *opuestos tienen un(a)* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{recta} \\ \textit{punto} \end{array} \right.$ *común.*

Se observó que este intercambio de papeles entre las nociones de punto y recta en el plano también se daba entre muchos otros pares de resultados de Geometría Sintética, dando lugar a lo que hoy se conoce como *Principio de Dualidad en el plano*.

> *Para todo teorema de geometría plana sobre puntos y rectas, su dual, obtenido intercambiando en él las palabras punto y recta y preservando la relación de incidencia, también es válido.*

Es más, esta doble función también se observó entre elementos del espacio, concretamente, entre puntos y planos, dando lugar a un principio análogo, el *Principio de Dualidad en el espacio*.

> *Para todo teorema de geometría en el espacio sobre puntos, rectas y planos, su dual, obtenido intercambiando en él las palabras punto y plano y preservando la relación de incidencia, también es válido.*

Por otra parte, J. D. Gergonne (1771-1859), aferrado defensor de la geometría analítica, estaba convencido de que los métodos analíticos permitirían demostrar que tal intercambio era universalmente válido. Y así fue, pues poco tiempo después, en 1829, Julius Plücker (1801-1868) publicó en el *Journal de Crelle* un artículo en el que, utilizando las recien introducidas coordenadas homogéneas, mostraba de una manera muy elegante la contrapartida analítica inmediata del principio geométrico de dualidad.

### 3.1.2. Correlaciones y polaridades

Como acabamos de ver, el Principio de Dualidad establece una correspondencia entre las nociones y relaciones fundamentales de un espacio proyectivo. En efecto, teniendo en cuenta la preservación de incidencias e inversión de la inclusión, esta especie de simetría existente entre el comportamiento de los puntos y el comportamiento de los hiperplanos de un espacio proyectivo se hace extensible a cualquier variedad lineal de $\mathbb{P}^n$ mediante el uso de las operaciones de intersección y suma de variedades [Xambó, 1997]. Hemos de notar, además, que podemos hablar de la dualidad como una característica específica del espacio proyectivo, pero que a la hora de calcular hacemos referencia a transformaciones concretas que funcionan de acuerdo con el Principio de Dualidad. Son básicamente dos los tipos de transformaciones proyectivas que permiten concretar esta correspondencia: las correlaciones y las polaridades.

Una correlación proyectiva en $\mathbb{P}^2$ es una transformación proyectiva [Coxeter, 1998] punto-recta, recta-punto preservando la relación de incidencia de acuerdo con el Principio de Dualidad en el plano. Análogamente, una correlación proyectiva en $\mathbb{P}^3$ es una correspondencia que relaciona puntos colineales con planos coaxiales de forma proyectiva preservando la incidencia de acuerdo con el Principio de Dualidad en el espacio. En general, una *correlación proyectiva* ($n \geq 2$) en $\mathbb{P}^n$ es una correspondencia biyectiva que relaciona puntos colineales con hiperplanos coaxiales de forma proyectiva preservando la relación de incidencia de acuerdo con el Principio de Dualidad. En otras palabras, se trata de una transformación proyectiva $\mathcal{C} : \mathcal{P}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}^n)$ verificando las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{C}$ transforma variedades lineales de dimensión $k$, $0 \leq k \leq n$ en variedades lineales de dimensión $n-1-k$. En particular transforma puntos en hiperplanos e hiperplanos en puntos respectivamente.

2. $\mathcal{C}$ preserva la relación de incidencia pero invirtiendo las inclusiones, esto es, si $\mathcal{R}$ es el relacional binario de inclusión, se tiene

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}(L, M)) = \mathcal{R}(\mathcal{C}(M), \mathcal{C}(L)),$$

   es decir,

$$L \subseteq M \Rightarrow \mathcal{C}(M) \subseteq \mathcal{C}(L),$$

   donde $L$ y $M$ son variedades lineales de $\mathbb{P}^n$ de dimensión $k$ y $l$ respectivamente, $0 \leq k \leq l \leq n-1$.

3. $\mathcal{C}$ es una biyección.

Así, en general una correlación $\mathcal{C}$ transforma cada punto $P$ en un hiperplano $p' = \mathcal{C}(P)$ y, a su vez, este hiperplano $p'$ en un nuevo punto $P'' = \mathcal{C}(p')$. Cuando $P$ y $P''$ coinciden, diremos que la correlación tiene periodo dos o que es involutiva. Esto conduce a la siguiente definición.

**Definición.** Una *polaridad* o *transformación polar* en $\mathbb{P}^n$ es una correlación proyectiva de periodo dos.

## 3.2. Polaridad en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

En esta sección estudiamos las polaridades en el plano proyectivo real, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. El *Primer Teorema de la Geometría Proyectiva* (ver Anexo) nos permite tratar los enfoques analítico y sintético de manera unificada. De esta forma, aunque en pro de una mayor claridad empecemos con un tratamiento sintético, tanto de los conceptos como de los resultados más interesantes, acabaremos dando su versión analítica en la Sección 3.4, para realizar los cálculos efectivos con este tipo de transformaciones en los capítulos siguientes.

### 3.2.1. Conceptos y resultados básicos

Teniendo en cuenta las definiciones, una polaridad transforma el punto proyectivo $P$ en la recta $p$, y recíprocamente, dicha recta $p$ en el punto $P$. Siguiendo la notación utilizada por Gergonne, decimos que $p$ es la *recta polar* de $P$ y que $P$ es el *polo* de $p$. En adelante, los polos y sus rectas polares se denotarán usando la misma letra, mayúscula en el primer caso y minúscula en el segundo.

Puesto que una polaridad dualiza incidencias, si el punto $P$ es de la recta $q$, la recta polar $p$ de $P$, pasa por el polo $Q$ de $q$. Diremos que $P$ y $Q$ son *puntos conjugados* y que $p$ y $q$ son *rectas conjugadas*. Si $p$ y $P$ inciden, decimos que $P$ es un *punto autoconjugado* y que $p$ es una *recta autoconjugada*. Este tipo especial de puntos y rectas es de gran importancia para la clasificación de polaridades y su existencia está sujeta a determinadas restricciones, como muestran los siguientes teoremas.

**Proposición 3.1.** *Toda recta que une dos puntos autoconjugados no puede ser una recta autoconjugada.*

*Demostración.* Sea $\rho$ una polaridad en el plano proyectivo real y supongamos que la recta $r$, que une dos puntos autoconjugados diferentes, es autoconjugada. En este caso, $r$ ha de contener, además de su polo $R = \rho(r)$, otro punto autoconjugado distinto $P$. Si esto es así, la polar $p$ de $P$ ha de coincidir con $r$ pues ambas rectas contienen los puntos $P$ y $R$. Pero esto es imposible pues $\rho$ es una biyección entre puntos y rectas. □

**Proposición 3.2.** *Toda recta del plano proyectivo contiene, a lo sumo, dos puntos autoconjugados.*

*Demostración.* Sean $A$ y $B$ dos puntos autoconjugados de una recta $s$, y consideremos $P$ un punto de la recta $AS$ diferente de $A$ y de $S$. Supongamos que la polar $p$ de $P$ interseca $b$ en el punto $Q$ (ver Figura 3.3). Notemos que $p$ no puede pasar por $P$ puesto que en tal caso $a$ sería una recta autoconjugada con dos puntos autoconjutados, en contradicción con la Proposición 3.1. Entonces, $Q = b \cap p$ es el polo de la recta $q = BP$, que interseca la recta $p$ en un punto, digamos, $R$. A su vez, $R = p \cap q$ es el polo de $r = PQ$ y su intersección con la recta $s$ es un nuevo punto $C$. Finalmente, $C = r \cap s$ es el polo de $c = RS$ que corta nuevamente a la recta $s$ en otro punto $D$ conjugado armónico de $C$ respecto de los puntos $A$ y $B$ tal y como se muestra en la Figura 3.3.

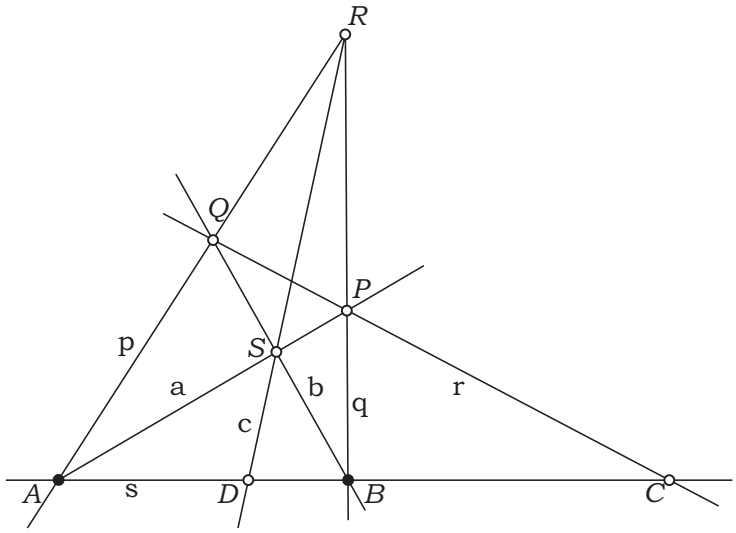



Figura 3.3: Demostración de la Proposición 3.2.

Ahora bien, $C$ no puede coincidir ni con $A$ ni con $B$ puesto que entonces $P$ coincidiría con $A$ o con $S$, en contradicción con la suposición inicial. Por tanto el punto $C$, que no está en su recta polar, no es un punto autoconjugado. De esta forma hemos visto que en $s$ hay dos puntos autoconjugados, a saber, $A$ y $B$ y un punto $C$ que no lo es. Pero los puntos autoconjugados en $s$ son invariantes por la proyectividad $X \barwedge x \cap s$, inducida en $s$ por la polaridad. En consecuencia, la proyectividad no es la identidad y no puede, por tanto, tener más de dos puntos invariantes; es decir, la recta $s$ no puede contener más de dos puntos autoconjugados por la polaridad (ver Anexo). $\square$

El siguiente resultado está relacionado con las proposiciones anteriores, y trata sobre el tipo de transformaciones que una polaridad induce en las rectas que no son autoconjugadas. Su importancia radica en que nos permitirá, como ya veremos, realizar la clasificación de polaridades en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (ver Sección 3.2.3).

**Proposición 3.3.** *Una polaridad en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce una involución de puntos conjugados en cualquier recta que no sea autoconjugada.*

*Demostración.* Sea $\rho$ una polaridad arbitraria en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $c$ una recta no autoconjugada, esto es, de manera que su polo $C = \rho(c) \notin c$. La proyectividad $X \barwedge Y$, donde $Y = x \cap c$ (Figura 3.4), transforma todo punto que no sea autoconjugado $B$ en otro punto $A = b \cap c$, cuya recta polar es $a = BC$. La misma proyectividad transforma $A$ en $B$. Puesto que, sobre la recta $c$, $\rho$ intercambia los puntos $A$ y $B$, ha de ser una involución como se quería ver (ver Anexo y [Coxeter, 1998]). $\square$

***Observación***

Notemos que las polariades de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ son las involuciones, de modo que la proposición anterior afirma que toda polaridad en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce una polaridad en toda recta que no sea autoconjugada. Esto mismo ocurrirá en el espacio $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

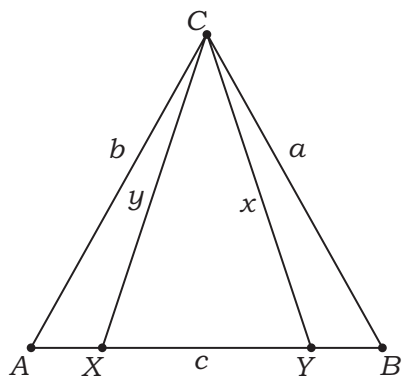



Figura 3.4: Triángulo autopolar $ABC$.

**Definición.** Dado un triángulo, llamamos *triángulo polar* al formado por las rectas polares de sus tres vértices y los polos de sus tres lados. Cuando ambos triángulos coinciden, decimos que el triángulo es *autopolar*. En este caso, dos vértices cualquiera o dos lados cualquiera siempre son conjugados (Figura 3.4).

Este tipo de triángulos nos proporciona la herramienta básica para la caracterización y construcción geométrica de polaridades en el plano proyectivo. Asimismo, veremos que una herramienta análoga, el tetraedro autopolar, nos servirá para el mismo propósito en el espacio.

El siguiente resultado caracteriza las transformaciones polares dentro del conjunto de las correlaciones proyectivas.

**Proposición 3.4.** *Toda correlación proyectiva de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ que relaciona cada vértice de un triángulo con su lado opuesto, es una polaridad.*

*Demostración.* Consideremos la correlación $\mathcal{C}$ que transforma los puntos $A$, $B$, $C$ y $P$ en las rectas respectivas $a$, $b$, $c$ y $p$,

$$\mathcal{C}: \ ABCP \to abcp,$$

donde $a$, $b$, $c$ son los lados del triángulo $ABC$ y $P$ es un punto en posición general, esto es, que no está sobre ninguno de los lados. Denotemos por $A_p$, $B_p$, $C_p$, $P_a$, $P_b$ y $P_c$ los puntos respectivos;

$$a \cap p\,, \quad b \cap p\,, \quad c \cap p\,, \quad a \cap AP\,, \quad b \cap BP\,, \quad c \cap CP,$$

como muestra la Figura 3.5.

La correlación, no sólo relaciona $A$, $B$, $C$ con $a$, $b$, $c$ sino que también lo hace con $a$, $b$ $c$ y $A$, $B$, $C$ puesto que relaciona $a = BC$ con $A = b \cap c$ y análogamente con los lados $b$ y $c$. Es más, relaciona $AP$ con $A_p$ y por tanto, $P_a$ con $AA_p$.

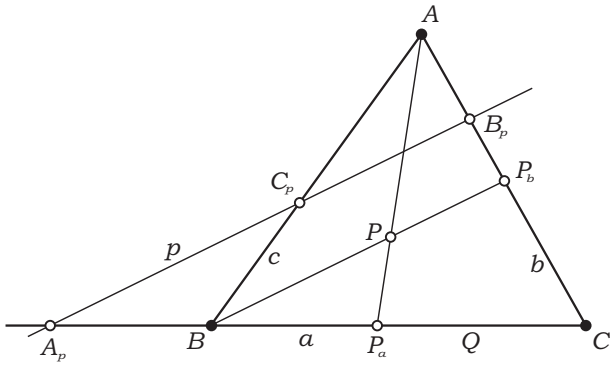



Figura 3.5: Polaridad inducida por un triángulo autopolar.

Queremos demostrar que la correlación $\mathcal{C}$ aplica la recta $p$ en el punto $P$. Para ello, consideremos la proyectividad $X \barwedge x \cap a$ inducida en $a$. Como $b \cap a$ y $c \cap a$ son $C$ y $B$ respectivamente, esta proyectividad intercambia $B$ y $C$; por tanto es una involución (ver Anexo). Puesto que $P_a A_p$ es un par de puntos de la involución, la correlación funciona como sigue; $\mathcal{C}(A_p) = AP_a$; análogamente $\mathcal{C}(B_p) = BP_b$; por tanto $\mathcal{C}(A_p B_p) = AP_a \cap BP_b$, esto es, $\mathcal{C}(p) = P$, y esto acaba la demostración. $\square$

Según acabamos de ver en la demostración de la Proposición 3.4, toda correlación proyectiva que relaciona $ABCP \to abcp$ es una polaridad, es decir

**Corolario 3.1.** *Una polaridad queda determinada dados un triángulo autopolar $ABC$, un polo $P$ no contenido en ninguno de sus lados y una recta (polar) $p$ que no contenga ninguno de sus vértices.*

La polaridad inducida por el triángulo autopolar $ABC$, el punto $P$ y la recta $p$, será en adelante denotada por el símbolo $(ABC)(Pp)$. Al usar esta notación, se asume que $P$ no está en ninguno de los lados del triángulo $ABC$ y por tanto, que su polar $p$ no pasa por ninguno de los vértices de éste.

### 3.2.2. Construcción geométrica de polaridades en el plano

Nos disponemos ahora a describir la construcción geométrica de la recta polar $x$ de cualquier punto $X$ en la polaridad $(ABC)(Pp)$. Para ello es necesario un resultado previo, debido a M. Chasles, que relaciona un triángulo y su triángulo polar.

**Lema 3.1 (Teorema de Chasles).** *Si las rectas polares de los vértices de un triángulo no coinciden con los lados opuestos respectivos, intersecan estos tres lados en tres puntos colineales.*

*Demostración.* Sea $PQR$ un triángulo arbitrario cuyas lados $QR$, $RP$, $PQ$ cortan a las rectas polares $p$, $q$, $r$ de sus vértices respectivos en los puntos $P_1$, $Q_1$, $R_1$, como se muestra en la Figura 3.6.

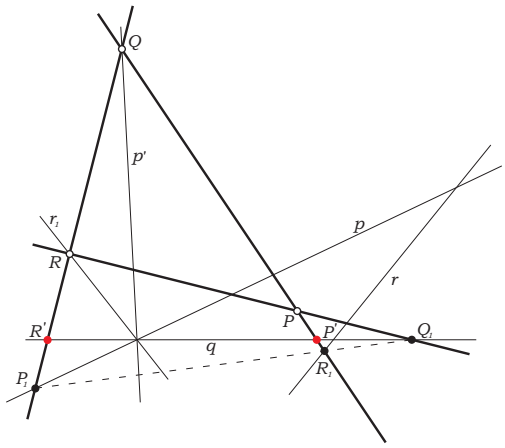



Figura 3.6: Teorema de Chasles.

Sabemos que la recta polar de $R_1 = PQ \cap r$ es $r_1 = (p \cap q)R$.
Consideremos ahora los puntos:

$$P' = q \cap PQ \quad \text{y} \quad R' = q \cap QR.$$

La polar del primero de ellos no es más que:

$$p' = Q(p \cap q).$$

Teniendo en cuenta que dados cuatro puntos colineales cualquiera, siempre es posible construir un proyectividad que los intercambie por pares [[Coxeter, 1998], Teorema 1.63, pg 12], se tiene

$$R_1PP'Q \ \overline{\wedge} \ PR_1QP'.$$

Puesto que cuatro puntos que forman cuaterna armónica se transforman, por una polaridad, en cuatro rectas que también forman cuaterna armónica, una polaridad induce una proyectividad entre cualquier conjunto de puntos y su haz de rectas correspondiente,

$$PR_1QP' \ \overline{\wedge} \ pr_1qp'.$$

Asimismo, por proyectividad entre el haz de rectas que pasan por $p \cap q$ y los puntos de la recta $QR$ se tiene,

$$pr_1qp' \ \overline{\wedge} \ P_1RR'Q.$$

En resumen, tenemos que:

$$R_1PP'Q \ \overline{\wedge} \ PR_1QP' \ \overline{\wedge} \ pr_1qp' \ \overline{\wedge} \ P_1RR'Q.$$

Ahora bien, dado que una proyectividad entre dos rectas distintas equivale a una perspectividad si, y sólo si, su punto de intersección es invariante, se tiene que

$$R_1PP'Q \overline{\overline{\wedge}} P_1RR'Q.$$

Puesto que el centro de esta perspectividad, esto es $PR \cap P'R' = Q_1$, debe pertenecer a la recta $R_1P_1$, los tres puntos $P_1$, $Q_1$ y $R_1$ están alineados, como queríamos ver.

$\square$

En la siguiente construcción, si el punto $X$ para el que vamos a calcular su polar $x$, es diferente de $P$, entonces no puede estar en más de una de las rectas $AP$, $BP$, $CP$ puesto que en tal caso su polar sería $p$. Por tanto, podemos suponer, cambiando la notación si es necesario, que $A$, $B$ y $C$ están colocados de forma que $X$ no se encuentra ni en $AP$ ni en $BP$. Además supondremos que $X \notin p$ ya que, en este caso, la construcción degenera y será una situación que trataremos posteriormente.

**Proposición 3.5.** *La recta polar de un punto $X$ cualquiera diferente de $P$ por la polaridad $(ABC)(Pp)$ es la recta $X_1X_2$ determinada por*

$$A_1 = a \cap PX, \quad P_1 = p \cap AX, \quad X_1 = AP \cap A_1P_1$$
$$B_2 = b \cap PX, \quad P_2 = p \cap BX, \quad X_2 = BP \cap B_2P_2$$

*Demostración.* Aplicando el lema anterior al triángulo $PAX$, deducimos que sus lados $AX$, $XP$, $PA$, intersecan las rectas polares $p$, $a$, $x$ de sus vértices respectivos en tres puntos colineales, dos de los cuales son $P_1$ y $A_1$. Por tanto, la recta $x$, polar de $X$, ha de cortar el lado $PA$ en un punto $X_1$ perteneciente a $P_1A_1$, esto es

$$X_1 = PA \cap P_1A_1.$$

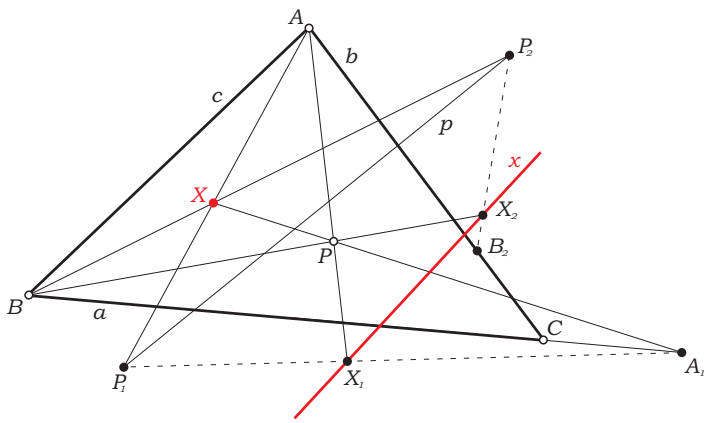



Figura 3.7: Construcción sintética de la recta polar.

Análogamente, aplicando el lema al triángulo $PBX$, $x$ también pasa por el punto $X_2$ y esto acaba la prueba (ver Figura 3.7).

□

La construcción anterior degenera si $X$ pertenece a $p$ ya que entonces tanto $X_1$ como $X_2$ coinciden con $P$. En este caso, elijamos un punto $Q$ arbitrario y construyamos su recta polar $q$. Si resulta que $q$ también pasa por el punto $X$ dado (en $p$), entonces la polar de $X$ es $PQ$ y el problema queda resuelto. Si no es así, podemos usar el método anterior para encontrar la recta polar de $X$ en la polaridad $(ABC)(Qq)$.

### 3.2.3. Clasificación de polaridades en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

Decimos que una polaridad es *hiperbólica* si tiene puntos autoconjugados y *elíptica* en caso contrario. La siguiente proposición asegura la existencia de ambos tipos de polaridades, pero antes es necesario recordar la siguiente propiedad.

Dado un triángulo $ABC$ cualquiera, las rectas soporte de sus tres lados dividen el plano proyectivo en cuatro regiones, según se indican en la Figura 3.8 (a). Cualquier recta $p$ que no pase por los vértices $A$, $B$, $C$ del triángulo, corta tres de estas cuatro regiones. La región restante, para la cual $p$ es exterior, la denotaremos por $ABC/p$ como se muestra en la Figura 3.8 (b) (ver [Coxeter, 1957]).

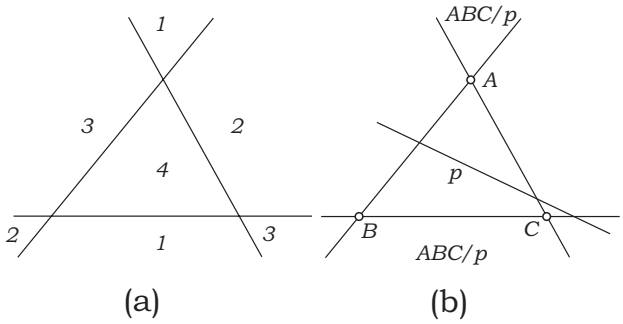



Figura 3.8: Regionamiento del plano proyectivo determinado por rectas en posición general.

**Proposición 3.6.** *Si $p$ es una recta que no pasa por ningún vértice de un triángulo autopolar $ABC$ y $P$ es su polo, la polaridad $(ABC)(Pp)$ es elíptica o hiperbólica según $P$ pertenezca a la región $ABC/p$ o a una de las tres regiones restantes determinadas por el triángulo.*

La demostración, que podemos encontrar en [Coxeter, 1957], utiliza las involuciones inducidas por la polaridad en los lados del triángulo autopolar $ABC$ y la posición relativa de $P$ y $p$ respecto de dicho triángulo. Así, la casuística estudiada da lugar a dos casos diferenciados; en el primero de ellos se tiene que en los tres lados del triángulo se inducen involuciones elípticas, en cuyo caso se concluye que se trata de una polaridad elíptica; en el segundo caso, dos de los lados contienen involuciones hiperbólicas y a partir de esto se deduce que la polaridad es hiperbólica. Una notación para distinguir ambas polaridades consiste en dar pares ordenados $(n_e, n_h)$, donde $n_e$ y $n_h$ indican el número de lados en los que se inducen involuciones elípticas e hiperbólicas respectivamente. Así, podemos referirnos a las polaridades elípticas como las de *tipo* $(3, 0)$ y a las hiperbólicas como las de *tipo* $(1, 2)$. Esta notación será de gran utilidad en el caso espacial.

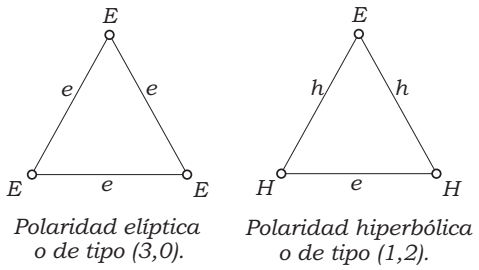



Figura 3.9: Tipos de polaridad en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

### 3.2.4. Definición alternativa de cónica proyectiva

Sea $P$ un punto autoconjugado por una polaridad hiperbólica. Asimismo, su recta polar $p$ es también una recta autoconjugada, de modo que toda polaridad hiperbólica puede ser descrita de la forma $(ABC)(Pp)$ donde $P \in p$. Hasta ahora, no hemos dicho nada acerca del cardinal del conjunto de puntos autoconjugados que poseen las polaridades hiperbólicas, pues sólo hemos hecho referencia a la existencia o no de éstos. Sin embargo, existe una importante propiedad que relaciona este tipo de polaridades con las cónicas del plano proyectivo y que, de hecho, nos proporciona una definición alternativa de éstas.

**Proposición 3.7.** *En las hipótesis anteriores, existe otro punto autoconjugado en toda recta que pasa por $P$ exceptuando su recta polar.*

*Demostración.* Por la Proposición 3.1, el único punto autoconjugado que contiene una recta autoconjugada es su polo. Por dualidad, la única recta autoconjugada que pasa por un punto autoconjugado $P$, es su recta polar. De este modo, por la Proposición 3.3, toda recta que pasa por $P$, exceptuando $p$, es una recta que contiene una involución de puntos conjugados. Dicha involución, que ya contiene un punto invariante $P$, ha de contener, por las propiedades de una involución (ver Anexo), un segundo punto invariante $Q$, que no es más que otro punto autoconjugado por la polaridad. □

Por tanto, la presencia de un punto autoconjugado en una polaridad implica la presencia de infinitos de estos. La propiedad interesante es que el lugar geométrico de estos puntos es una cónica proyectiva y sus rectas polares, las tangentes a dicha cónica. Esta definición, debida a von Staudt (*Geometrie der Lage*, 1847), presenta la cónica como figura autodual, es decir:

i) Como lugar geométrico de los puntos autoconjugados (*cónica puntual*).
ii) Como envolvente de las rectas autoconjugadas (*cónica tangencial*).

### 3.2.5. Polaridad hiperbólica definida por una cónica proyectiva

Hemos visto que toda polaridad hiperbólica determina una cónica proyectiva, formada por los puntos que son autoconjugados en la polaridad. Recíprocamente, toda cónica proyectiva determina una polaridad hiperbólica, la construcción de la cual mostramos a continuación.

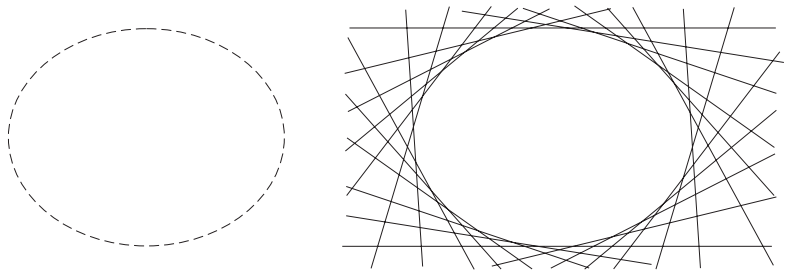


Figura 3.10: Cónica *puntual* y cónica *tangencial.*

**Proposición 3.8.** *Si $PQRS$ es un cuadrángulo inscrito en una cónica $\mathcal{C}$, su triángulo diagonal es autopolar.*

*Demostración.* Consideremos el cuadrángulo $PQRS$ inscrito en la cónica $\mathcal{C}$ y sean

$$A = PS \cap QR, \quad B = QS \cap RP, \quad C = RS \cap PQ,$$

sus tres puntos diagonales, como muestra la Figura 3.11.

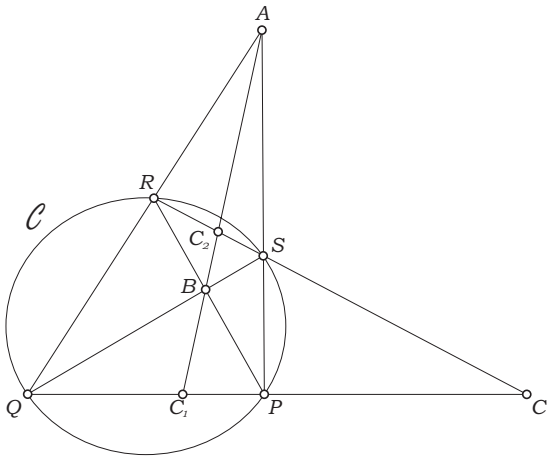



Figura 3.11: Propiedad del triángulo diagonal de un cuadrángulo inscrito en una cónica.

La recta $AB$ interseca los lados $PQ$ y $RS$ en los puntos $C_1$ y $C_2$ de manera que se tienen las cuaternas armónicas $\mathcal{H}(PQ, CC_1)$ y $\mathcal{H}(RS, CC_2)$ (ver Anexo). Notemos que tanto $C_1$ como $C_2$ son conjugados de C. En consecuencia, la recta $AB$ que los contiene es la polar de C [Coxeter, 1998]. Análogamente, $BC$ y $CA$ son las rectas polares de $A$ y $B$ respectivamente, y esto acaba la prueba. □

**Corolario 3.2 (Determinación de una polaridad hiperbólica).** *Sea $\mathcal{C}$ una cónica proyectiva y $C$ un punto arbitrario que no esté sobre la cónica. La construcción geométrica de la recta polar de $C$ es la siguiente:*

*1. Elegir dos secantes arbitrarias a la cónica, $PQ$ y $RS$, que pasen por el punto $C$.*
*2. La recta polar de $C$ es la recta $c = AB$ donde*

$$A = QR \cap PS \quad y \quad B = RP \cap QS$$

*tal y como se muestra en la Figura 3.12.*

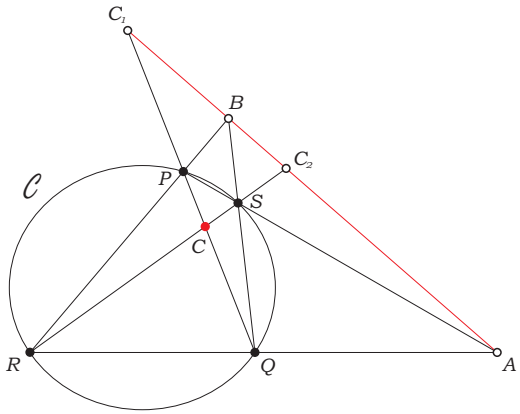



Figura 3.12: Construcción de la recta polar de un punto $C$ en la polaridad inducida en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ por una cónica $\mathcal{C}$.

En algunas geometrías, como es el caso de la geometría compleja, toda polaridad es hiperbólica, de manera que toda polaridad determina una cónica. Entretanto, en otras como la geometría real, acabamos de comprobar que la teoría de polaridades es más general que la teoría de cónicas.

## 3.3. Polaridad en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

### 3.3.1. Conceptos y resultados básicos

De forma análoga al caso plano, una polaridad en el espacio transforma un punto $A$ en el plano $\alpha$. Decimos que $\alpha$ es el *plano polar* de $A$. Recíprocamente, la polaridad transforma $\alpha$ en el punto $A$, al que llamamos, igual que en el caso plano, *polo* de $\alpha$. Igualmente, si $B \in \alpha$, su plano polar, $\beta$, pasa por $A$. Decimos que $A$ y $B$ son *puntos conjugados* y que $\alpha$ y $\beta$ son *planos conjugados*. En este caso, las propiedades de una polaridad nos aseguran que la recta $AB$ está contenida en cualquiera de los planos polares de los puntos de la intersección $\alpha \cap \beta$. Dos rectas relacionadas de esta forma decimos que son *rectas polares* la una de la otra. También decimos que dos rectas son *conjugadas* si alguna de ellas interseca la recta polar de la otra. Las definiciones de puntos y planos autoconjugados son análogas al caso plano. Finalmente, decimos que una recta es *autoconjugada* si tiene intersección no vacía con su recta polar y *autopolar* si ambas coinciden.

En un plano $\alpha$ que no sea autoconjugado, los planos polares y las rectas polares de los puntos y rectas contenidos en $\alpha$ respectivamente, intersecan dicho plano en rectas y puntos de acuerdo con una polaridad plana. Diremos que es la polaridad inducida por la polaridad en el espacio. De forma similar, se induce una involución en toda recta que no sea autoconjugada ni autopolar [Coxeter, 1957].

### 3.3.2. Clasificación de polaridades en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

Sea $BCD$ un triángulo autopolar para la polaridad inducida en el plano polar de un punto $A$ no autoconjugado. Entonces decimos que el tetraedro $ABCD$ es un *tetraedro autopolar*. En éste, dos vértices o dos caras cualquiera son conjugados y dos aristas opuestas son rectas polares. Como hicimos en la sección anterior, estos ingredientes permiten caracterizar y clasificar las polaridades en el espacio $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Las demostraciones utilizan argumentos similares a los empleados en el caso bidimensional (ver [Coxeter, 1957]).

**Proposición 3.9 (Caracterización).** *Toda correlación que transforma cada vértice de un tetraedro en la cara opuesta, es un polaridad.*

Del mismo modo que un triángulo divide el plano en cuatro regiones, un tetraedro produce una partición del espacio proyectivo en ocho regiones [Coxeter, 1957]. La forma de particularizar una de dichas regiones en el espacio, no es más que una generalización del caso plano, observando que un quinto plano $\omega$ en posición general pasa por siete de las ocho regiones. Nos referiremos a la región restante con el símbolo $ABCD/\omega$. Se tiene:

**Proposición 3.10.** *Dada una polaridad en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, sea $\omega$ un plano que no pase por ninguno de los vértices de un tetraedro autopolar $ABCD$, y $P$ su polo. Entonces, la polaridad admite puntos autoconjugados excepto en el caso en que $P$ pertenece a $ABCD/\omega$.*

Cuando $P$ pertenece a $ABCD/\omega$, la involución de puntos conjugados inducida en cada una de las aristas del tetraedro es elíptica; no existen puntos, rectas ni planos autoconjugados y tampoco hay rectas autopolares [Coxeter, 1957]. En este caso decimos que la polaridad es *uniforme* o *elíptica*.

En caso contrario y si se tiene en cuenta, como ahora veremos, que las regiones restantes se agrupan en dos clases, existen dos posibilidades dependiendo de la posición de $P$. Para determinar a que clase nos referimos, observamos que el tetraedro $ABCD$ corta el plano $\omega$ en un cuadrilátero. Esto divide el resto del plano en siete regiones, que no son más que las secciones de las siete regiones del espacio. Una forma de visualizar esto en el espacio ordinario $\mathbb{E}^3$, es considerando que una de las caras del tetraedro es el plano del infinito y que las tres restantes son los planos que definen una referencia ortonormal. De esta forma, las ocho regiones corresponden a los ocho octantes en que queda dividido el espacio euclídeo. Así es más sencillo ver la forma en que un quinto plano corta los planos de dicha referencia en un triángulo, cuya intersección con el plano del infinito nos da un cuadrilátero.

De estas siete regiones planas, algunas están limitadas por tres aristas y otras lo están por cuatro. Dependiendo entonces de a que región pertenezca $P$, tres o cuatro de las seis aristas del tetraedro contendrán involuciones hiperbólicas de puntos conjugados, mientras que en el resto de aristas se inducen involuciones elípticas [Coxeter, 1957]. Poniendo el número de involuciones elípticas primero, podemos referirnos a las polaridades vistas hasta el momento como de *tipo (6,0), (3,3)* y *(2,4)* aunque todavía no podemos distinguir los dos últimos casos.

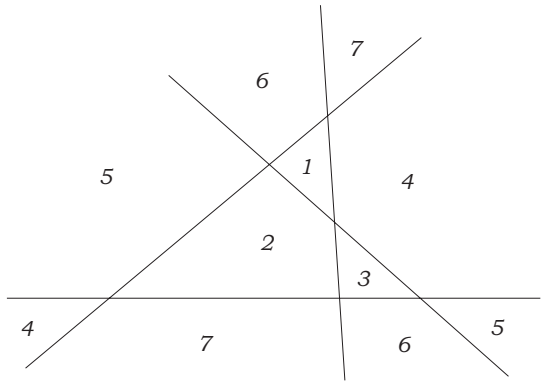



Figura 3.13: Regionamiento de un plano por las caras de un tetraedro autopolar. La numeración par e impar corresponde a regiones limitadas por cuatro y tres caras respectivamente.

Puesto que las polaridades inducidas en las caras del tetraedro $ABCD$ han de ser, como vimos en la sección anterior, de *tipo (3,0)* o *(1,2)*, la distribución de involuciones elípticas e hiperbólicas ha de ser como se indica en la Figura 3.14.

La siguiente proposición caracteriza las polaridades de *tipo (3,3)* y *(2,4)*:

**Proposición 3.11.** *Sea $\varphi$ una polaridad que contenga, al menos, un punto autoconjugado y otro que no lo sea. Entonces se trata de una polaridad de tipo (2,4) o de tipo (3,3) según contenga o no una recta autopolar, respectivamente.*

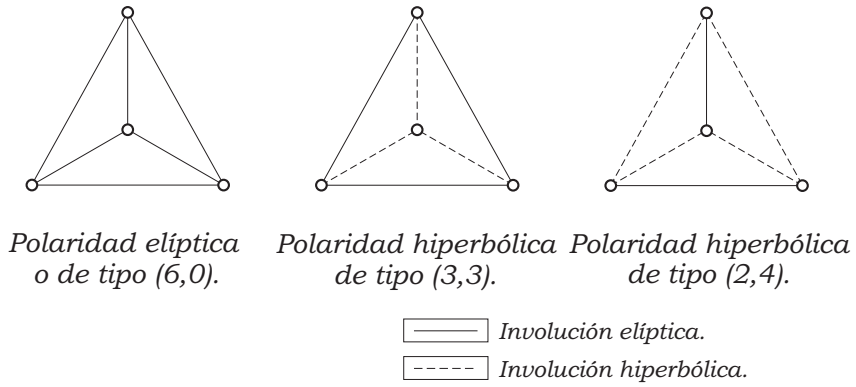



Figura 3.14: Tres de las cuatro polaridades en el espacio clasificadas según las involuciones inducidas en las aristas de un tetraedro autopolar.

*Demostración.* Consideremos una polaridad de *tipo (2,4)* y sean $l$ y $l'$ un par de aristas opuestas conteniendo involuciones hiperbólicas con puntos invariantes $A$, $B$ y $A'$, $B'$ respectivamene. Puesto que $l$ y $l'$ son rectas polares, los planos polares de los puntos autoconjugados $A$ y $A'$ son

$$\alpha = Al' \quad \text{y} \quad \alpha' = A'l.$$

Por tanto, la recta polar de $AA'$ es

$$Al' \cap A'l = AA',$$

con lo que una polaridad de *tipo (2,4)* admite rectas autopolares. Y recíprocamente, si una polaridad admite una recta autopolar y un punto autoconjugado, entonces ha de ser de *tipo (2,4)* respecto de cualquier tetraedro autopolar. Dado que todo plano no autoconjugado contiene un punto autoconjugado (donde corta la recta autopolar), la polaridad inducida en este plano es necesariamente hiperbólica. Por tanto, la polaridad inducida en toda cara de un tetraedro autopolar es de *tipo (1,2)*, con lo que el tetraedro ha de ser de *tipo (2,4)*. De este modo, una polaridad de *tipo (2,4)* no puede ser una de *tipo (3,3)*. □

En el espacio no existen las restricciones que había en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ en cuanto a la existencia de puntos autoconjugados (Proposiciones 3.1 y 3.2) de modo que, volviendo a la clasificación general de polaridades, aún hemos de considerar la posibilidad en que todo punto (y todo plano) sea autoconjugado. Puesto que en este caso no existen tetraedros autopolares, se conviene denotar este tipo de polaridades por el símbolo *(0,0)* y nos referiremos a ella como *polaridad vacía* o *sistema vacío*. En este caso, se dice que el conjunto de rectas autopolares es un *complejo lineal*. La existencia de este tipo de polaridades queda establecida por el siguiente teorema cuya demostración se puede consultar en [Coxeter, 1957].

**Teorema 3.1.** *Toda correlación que transforma los vértices de un pentágono completo* [1] *$ABCDE$ en sus respectivos planos $EAB$, $ABC$, $BCD$, $CDE$, $DEA$ es una polaridad vacía.*

[1] Configuración de cinco puntos en posición general de manera que nunca cuatro de ellos son coplanares, así como los $\binom{5}{3}$ planos que generan y las $\binom{5}{2}$ rectas generadas a partir de la intersección de dichos planos.

El siguiente cuadro muestra la clasificación de polaridades en el espacio proyectivo real atendiendo a la existencia de los puntos (planos) autoconjugados:

| ***Polaridad*** | ***Lugar geométrico de los puntos autoconjugados*** | ***Símbolo*** |
|---|---|---|
| *Elíptica o Uniforme* | $\varnothing$ | *(6,0)* |
| *Hiperbólica* | *Cuádrica no reglada* | *(3,3)* |
| *Hiperbólica* | *Cuádrica reglada* | *(2,4)* |
| *Vacía* | $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ | *(0,0)* |

Cuadro 3.1: Polaridades en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

### 3.3.3. Definición alternativa de cuádrica proyectiva

Según von Staudt, dada una polaridad en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y análogamente a como se hizo con las cónicas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, se puede definir una cuádrica proyectiva de cualquiera de las dos formas siguientes, presentándola como:

i) El lugar geométrico de los puntos autoconjugados (*cuádrica puntual*).
ii) La envolvente geométrica de los planos autoconjugados (*cuádrica tangencial*).

Nótese que una cuádrica proyectiva es también una figura autodual. En el caso de polaridades de *tipo (2,4)* se trata de una cuádrica reglada, mientras que las de tipo *(3,3)* corresponden a cuádricas ovaladas o no regladas. Los puntos autoconjugados están sobre la cuádrica y sus planos polares corresponden a los planos tangentes a dicha cuádrica. Las rectas autoconjugadas se corresponden con las rectas tangentes y, en el caso de polaridades de *tipo (2,4)*, las rectas autopolares son los generadores de la cuádrica reglada (ver la Tabla 3.1).

## 3.4. Tratamiento analítico de las polaridades

### 3.4.1. Dualidad desde el punto de vista analítico

Consideremos $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ el espacio proyectivo real de dimensión $n$. Recordemos que, analíticamente, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ se define como el espacio proyectivo asociado a un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ de dimensión $n+1$ $(n \geq -1)$ y está formado por el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1. También se dice que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es el proyectivizado de $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ y se escribe $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(E^{n+1}_{\mathbb{R}}) = [E^{n+1}_{\mathbb{R}}]$. Por definición, su dimensión es $n$. Recordemos además, que un punto en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ está representado por un vector no nulo $v \in E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ y es denotado por $P = [v]$. Este vector es único salvo multiplicar por un escalar $\lambda \neq 0$, es decir que $P = [v] = [\lambda v]$, con $\lambda \neq 0$, $v \in E^{n+1}_{\mathbb{R}} - \{0\}$. Las variedades lineales de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ no son más que los proyectivizados de subespacios vectoriales no nulos de $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$. Por ejemplo, una recta en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es $\mathbb{P}(F)$, siendo $F \subseteq E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ un subespacio de dimensión 2.

Por otra parte, se define el *espacio proyectivo dual* de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ como $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee = \mathbb{P}((E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee)$, donde $(E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ indica el espacio vectorial dual de $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$, esto es, el conjunto de aplicaciones lineales $\omega : E^{n+1}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$. En este caso, un punto en $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ está representado por una forma lineal no nula $\omega$. Dada $\omega \in (E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ y $v \in E^{n+1}_{\mathbb{R}}$, diremos que son *incidentes* si $\omega(v) = 0$.

Usando $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ y $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ y a partir de las relaciones existentes entre $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ y $(E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$, es posible modelizar de forma analítica el fenómeno de la dualidad en un espacio proyectivo. Para ello serán necesarias algunas definiciones y resultados previos, la demostración de los cuales el lector podrá encontrar en [Xambó, 1997].

Dado un subespacio vectorial $F \subseteq E^{n+1}_{\mathbb{R}}$, escribimos $F^* \subseteq (E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ para denotar el subespacio incidente con $F$, es decir, el subespacio de $(E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ formado por los elementos $\omega \in (E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ tales que son incidentes con todos los vectores de $F$. Se cumple que

$$dim_{\mathbb{R}}(F^*) = dim_{\mathbb{R}}(E^{n+1}_{\mathbb{R}}) - dim_{\mathbb{R}}(F).$$

Análogamente, si $W$ es un subespacio vectorial de $(E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$, escribimos $W^* \subseteq E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ para designar el subespacio incidente con $W$, esto es, el formado por los vectores $v \in E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ que verifican $\omega(v) = 0$ $\forall \omega \in W$. También se tiene que

$$dim_{\mathbb{R}}(W^*) = dim_{\mathbb{R}}(E^{n+1}_{\mathbb{R}}) - dim_{\mathbb{R}}(W).$$

Es posible ver, además, que se verifican las propiedades siguientes:

$$F = F^{**}, \quad \forall\, F \subseteq E^{n+1}_{\mathbb{R}},$$
$$W = W^{**}, \quad \forall\, W \subseteq (E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee.$$

Finalmente, si denotamos por $\mathcal{L}(E_{\mathbb{R}}^{n+1})$ el conjunto de subespacios vectoriales de $E_{\mathbb{R}}^{n+1}$, se tiene:

**Teorema 3.2.** *La aplicación $\mathcal{L}(E_{\mathbb{R}}^{n+1}) \xrightarrow{*} \mathcal{L}((E_{\mathbb{R}}^{n+1})^{\vee})$, $F \mapsto F^*$, es una biyección, y su inversa es la aplicación tal que $W \mapsto W^*$. Además, la aplicación $*$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *$F_1 \subseteq F_2$ si y solo si $F_2^* \subseteq F_1^*$.*
2. *$(F_1 + F_2)^* = F_1^* \cap F_2^*$.*
3. *$(F_1 \cap F_2)^* = F_1^* + F_2^*$.*

*En particular, si restringimos la biyección $*$ al conjunto $\mathcal{L}_{k+1}(E_{\mathbb{R}}^{n+1})$ de los subespacios vectoriales de dimensión $k+1$, obtenemos la biyección $\mathcal{L}_{k+1}(E_{\mathbb{R}}^{n+1}) \xrightarrow{*} \mathcal{L}_{n-k}((E_{\mathbb{R}}^{n+1})^{\vee})$ donde, análogamente, $\mathcal{L}_{n-k}((E_{\mathbb{R}}^{n+1})^{\vee})$ indica el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión $n-k$ de $(E_{\mathbb{R}}^{n+1})^{\vee}$.*

Teniendo en cuenta las definiciones de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ y $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)^{\vee}$ y las propiedades de la aplicación $*$, es posible crear una correspondencia entre variedades lineales de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ y variedades lineales de $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)^{\vee}$. Efectivamente, si $\Lambda \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)^{\vee}$, entonces ha de ser $\Lambda = [W]$ con $W$ un subespacio vectorial de $(E_{\mathbb{R}}^{n+1})^{\vee}$. Denotaremos $\Lambda^* = [W^*] \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ y diremos que $\Lambda^*$ es el *eje*, o el *soporte*, de $\Lambda$. Del mismo modo, si $L \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, con $L = [F]$, diremos que $L^* = [F^*] \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)^{\vee}$ es la *estrella* de $L$. Se puede comprobar que si $dim(L) = k$, entonces $dim(L^*) = n-k-1$ y análogamente, si $dim(\Lambda) = k'$, se verifica que $dim(\Lambda^*) = n-k'-1$.

Denotemos por $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{\vee}$ el conjunto de variedades lineales de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ y $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)^{\vee}$ respectivamente. Entonces, la aplicación biyectiva $*$ entre $E_{\mathbb{R}}^{n+1}$ y $(E_{\mathbb{R}}^{n+1})^{\vee}$ y su inversa, inducen aplicaciones $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^{\vee}$ $(L \mapsto L^*)$ y $\mathcal{S}^{\vee} \longrightarrow \mathcal{S}$ $(\Lambda \mapsto \Lambda^*)$, entre los conjuntos de variedades lineales $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ y $\mathcal{S}^{\vee} \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)^{\vee}$. Es más, si denotamos por $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}$ el conjunto de variedades lineales de dimensión $k$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ y $\mathcal{S}_{k'}^{\vee} \subseteq \mathcal{S}^{\vee}$ de forma análoga, entonces obtenemos aplicaciones $\mathcal{S}_k \longrightarrow \mathcal{S}_{n-k-1}^{\vee}$ y $\mathcal{S}_{k'}^{\vee} \longrightarrow \mathcal{S}_{n-k'-1}$. De hecho, estas aplicaciones no son más que la restricción de las que se inducen entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{\vee}$. De todo lo anterior se deduce el siguiente

**Teorema 3.3 (de dualidad).** *Las aplicaciones $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ y $L \mapsto L^*$ entre los conjuntos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{\vee}$ son biyectivas e inversas la una de la otra. Además, verifican las siguientes propiedades:*

1. *$L_1 \subseteq L_2$ si y solo si $L_2^* \subseteq L_1^*$.*
2. *$(L_1 \vee L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$.*
3. *$(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \vee L_2^*$.*

*En particular, las aplicaciones $\mathcal{S}_k \longrightarrow \mathcal{S}_{n-k-1}^{\vee}$ y $\mathcal{S}_k^{\vee} \longrightarrow \mathcal{S}_{n-k-1}$ son biyectivas una de la otra.*

Notemos que, por el teorema de dualidad, podemos identificar los puntos de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$, que forman el subconjunto $\mathcal{S}_0^\vee$ de $\mathcal{S}^\vee$, con los hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ que forman el subconjunto $\mathcal{S}_{n-1}$ de $\mathcal{S}$. De hecho, si $\omega \in (E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ es no nula, $[\omega]^* = [\omega^*]$ es el hiperplano representado por el espacio $\omega^*$ de los vectores de $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ incidentes con $\omega$. Por tanto, de ahora en adelante, identificaremos los puntos de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ con los hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Por otra parte, con la identificación anterior, las variedades lineales de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ se pueden interpretar como conjuntos de hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. En este sentido, diremos que un conjunto de hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es un *haz de hiperplanos* si este conjunto forma una variedad lineal del espacio proyectivo $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$. En otras palabras, hablaremos de las variedades lineales de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ como haces de hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Notemos que, por el teorema de dualidad, todo haz de hiperplanos (variedad lineal de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$) es de la forma $L^*$, donde $L$ es una variedad lineal de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. La siguiente proposición nos proporciona una descripción del conjunto de hiperplanos que corresponde a la variedad lineal $L^*$ en términos de la variedad lineal $L$ y de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

**Proposición 3.12.** *El haz de hiperplanos $L^*$ está formado precisamente por los hiperplanos que contienen la variedad lineal $L$.*

Por ejemplo, los hiperplanos de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ son los haces de la forma $P^*$, donde $P$ es un punto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Otro ejemplo lo constituyen las variedades lineales del plano proyectivo real $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, en el que vemos que las rectas se identifican con los puntos de $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^\vee$ y que los puntos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ se identifican con las rectas de $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^\vee$, haciendo corresponder al punto $P$, el haz $P^*$ formado por el conjunto de las rectas incidentes con $P$. Finalmente, en el caso de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, los puntos de $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^\vee$ son los planos de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, las rectas de $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^\vee$ se pueden identificar con las rectas de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ (si $L$ es una recta de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, la recta de $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^\vee$ que le corresponde es $L^*$, la radiación de planos de eje $L$, de manera que $L$ es, como recta de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, el conjunto de sus puntos y, como recta de $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^\vee$, el conjunto de los planos que la contienen). Por último, los planos de $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^\vee$ se identifican con los puntos de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, haciendo corresponder al punto $P$ el plano $P^*$ de eje $P$, o dicho de otra forma, el haz de planos que pasan por $P$.

Finalmente y para acabar de tener todos los ingredientes necesarios, consideremos $\mathcal{R} = [P_0, \ldots, P_n; U]$ una referencia proyectiva en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. La *referencia proyectiva dual* de la referencia $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^\vee = [P_0^\vee, \ldots, P_n^\vee; U^\vee]$, se define como la referencia asociada a la base dual de una base adaptada a $\mathcal{R}$. En otras palabras, si $\{e_0, \ldots, e_n\}$ es una base de $E^{n+1}_{\mathbb{R}}$ adaptada a $\mathcal{R}$ ($P_0 = [e_0], \ldots, P_n = [e_n]$ y $U = [e_0 + \ldots + e_n]$) y $\{e^0, \ldots, e^n\}$ es la correspondiente base dual (es decir, $e^j \in (E^{n+1}_{\mathbb{R}})^\vee$ es la forma lineal tal que $e^j(e_i) = 1$ si $i = j$, $e^j(e_i) = 0$ si $i \neq j$), entonces, $P_j^\vee = [e^j]$ y $U^\vee = [e^0 + \ldots + e^n]$. Con esto tenemos:

**Proposición 3.13.** *Un hiperplano de ecuación $u_0\xi_0 + \ldots + u_n\xi_n = 0$ respecto de la referencia $\mathcal{R}$ tiene coordenadas proyectivas $(u_0, \ldots, u_n)$ respecto de la referencia dual $\mathcal{R}^\vee$. Recíprocamente, si $(u_0, \ldots, u_n)$ son coordenadas proyectivas de un hiperplano respecto de la referencia $\mathcal{R}^\vee$, entonces el hiperplano tiene ecuación $u_0\xi_0 + \ldots + u_n\xi_n = 0$ respecto de la referencia $\mathcal{R}$.*

### 3.4.2. Correlaciones y polaridades

Con los resultados previos, podemos ya abordar la descripción analítica de correlaciones y polaridades. En efecto, desde el punto de vista analítico, una correlación proyectiva en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ no es más que una proyectividad $\mathcal{C} : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ y por tanto esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \rho \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde $A_{(n+1)\times(n+1)}$ es una matriz no singular determinada salvo un escalar $\rho \neq 0$, $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ son coordenadas de puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ y $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ coordenadas de puntos de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$. Ahora bien, la identificación anterior entre puntos de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ e hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, nos permite interpretar las coordenadas $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ como los coeficientes de un hiperplano en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Determinemos ahora aquellos puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ que son incidentes con su hiperplano imagen por la correlación $\mathcal{C}$. En efecto, si $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ son las coordenadas de un punto $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, usando la identificación existente, podemos decir que su hiperplano imagen $h_P$ tiene coordenadas $(u_0, \ldots, u_n)$. La condición para que sean incidentes es

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, usando (3.1) y teniendo en cuenta que $\rho \neq 0$,

$$(\xi_0, \ldots, \xi_n) A^t \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

La ecuación anterior, que puede expresarse de la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \xi_i \xi_j = 0,$$

representa la condición necesaria y suficiente para que el punto $P$ de coordenadas proyectivas $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ pertenezca a su propio hiperplano imagen. Si esta condición se verifica para todo punto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, entonces decimos que la correlación es un *sistema vacío o nulo*. Se puede comprobar (ver [Schreier y Sperner, 1961]) que para que esto ocurra, la matriz $A$ ha de ser una matriz antisimétrica. Además, este tipo de correlaciones sólo se da en espacios proyectivos de dimensión impar. La razón es sencilla, puesto que si la dimensión es par, entonces $A$ es una matriz cuadrada de la forma $A_{(2n+1)\times(2n+1)}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Asimismo, dado que además es antisimétrica, se ha de verificar:

$$det(A) = det(-A^t) = (-1)^{2n+1} \cdot det(A) = -det(A),$$

con lo que se deduce que $det(A) = 0$, en contradicción con que $A$ era no singular.

Consideremos ahora un hiperplano $h$ de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ cuyas coordenadas en $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ según la identificación mencionada son $(v_0, \ldots, v_n)$. Si buscamos la imagen por la correlación $\mathcal{C}$, de cada uno de los puntos de dicho hiperplano, obtenemos un conjunto de puntos en $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ que constituyen un hiperplano de este segundo espacio. Sabemos que este hiperplano de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ se interpreta en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ como el punto $Q_h$, que no es más que el eje del haz de hiperplanos correspondientes a cada uno de los puntos del hiperplano de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$, imagen de los puntos de $h$. Diremos que $Q_h$ es la imagen de $h$ por la correlación $\mathcal{C}$. Para determinar las coordenadas de $Q_h$ consideremos la ecuación del hiperplano en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = 0,$$

Cada uno de los puntos de este hiperplano se transforma en un punto de $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})^\vee$ según la ecuación (3.1). Expresemos ahora las coordenadas de cada uno de los puntos originales en función de las coordenadas de sus imágenes respectivas, esto es:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto, se verifica

$$\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0.$$

Interpretando nuevamente las coordenadas $(u_0, \ldots, u_n)$ de los puntos imagen como hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, la expresión anterior representa la ecuación que verifica cada uno de los hiperplanos del haz de hiperplanos, cuyo eje es el punto $Q_h$. Por tanto, las coordenadas de $Q_h$ no son más que los coeficientes de la expresión anterior, esto es:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \cdot (A^t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

En resumen, si los puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ se transforman según la ecuación

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \rho \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [A] \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

entonces, la imagen de un hiperplano se determina según

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \cdot (A^t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = [(A^t)^{-1}] \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Como ya dijimos en la Sección 3.1.2, si un punto $P$ se transforma en el hiperplano $p'$ y, a su vez, $p'$ se transforma en el punto $P''$, en general, $P$ y $P''$ son diferentes. Decíamos también que la transformación es una correlación involutiva o polaridad cuando ambos puntos coinciden. Por tanto, la condición que ha de cumplir la matriz $A$ para que la correlación $\mathcal{C}$ sea una polaridad es que para cualquier punto $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ se verifique

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(P)) = P, \tag{3.3}$$

o, equivalentemente, que para todo hiperplano $h$ se cumpla

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(h)) = h.$$

Dado que en cualquier caso llegaremos a la misma conclusión, nos centraremos en la Condición (3.3), dada para los puntos. Si $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ son las coordenadas de un punto $P$ cualquiera, dicha condición se expresa

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi)) = \mathcal{C}([A]\xi) = [(A^t)^{-1} \cdot A]\xi = \xi,$$

es decir,

$$[(A^t)^{-1} \cdot A] = [I] \Longleftrightarrow [A] = [A^t],$$

pero esto último significa que

$$A = \lambda \cdot A^t, \quad \lambda \neq 0. \tag{3.4}$$

Ahora bien, esta última igualdad sigue siendo cierta si reemplazamos cada matriz por su transpuesta

$$A^t = \lambda \cdot A,$$

y sustituyendo $A^t$ en (3.4) se obtiene

$$A = \lambda^2 \cdot A,$$

con lo que $\lambda$ sólo puede tomar los valores $\lambda = \pm 1$. Por tanto, obtenemos correlaciones involutivas si y solo si $A = -A^t$ o $A = A^t$. Con el primer caso ya hemos tratado, se trata de las correlaciones que son sistemas vacíos y que incluiremos dentro de las polaridades por ser involutivas. En el caso de que $A = A^t$ hablaremos de *polaridades ordinarias*.

Antes de ver como se traducen las consideraciones anteriores al tratar con el caso concreto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, estudiemos como expresar de forma más compacta las ecuaciones de una polaridad ordinaria. Veamos en primer lugar qué significa que dos puntos sean conjugados desde el punto de vista analítico. Sean $P$ y $Q$ dos puntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ de coordenadas proyectivas $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ y $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$, respectivamente. La condición para que sean conjugados es que $P$ esté en el hiperplano polar $h_Q$ de $Q$ respecto a la polaridad considerada. Puesto que $h_{Qi} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\eta_j$, la condición de incidencia entre $P$ y $h_Q$, esto es,

$$\sum_{i=0}^{n} h_{Qi}\xi_i = 0,$$

se escribe de la siguiente forma,

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\eta_j\xi_i = 0. \tag{3.5}$$

Hemos de observar que es posible obtener una expresión análoga para el caso de hiperplanos. Un caso particularmente interesante es cuando la Condición (3.5) se verifica para los puntos de una referencia proyectiva. Por ejemplo, si $P$ y $Q$ tienen coordenadas $(0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ y $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ respectivamente, entonces la Condición (3.5) implica que $a_{23} = 0$. En general, el símplex de referencia es autopolar si se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i$ y para todo $j$ con $i \neq j$. De esta forma, escogiendo cualquier símplex autopolar como símplex de referencia, es posible representar una polaridad ordinaria mediante una matriz con la forma $A = diag(a_{00}, a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\prod_{i=0}^{n} a_{ii} \neq 0$.

### 3.4.3. Polaridades ordinarias en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

En el caso de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y eligiendo como triángulo de referencia un triángulo autopolar, hemos visto que la ecuación de la polaridad queda reducida a la forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & a_{00}\xi_0 \\ u_1 & = & a_{11}\xi_1 \\ u_2 & = & a_{22}\xi_2\,, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

con $a_{00}a_{11}a_{22} \neq 0$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que $a_{11}$ y $a_{22}$ son positivos. En caso contrario, siempre podemos cambiar el nombre de las variables y/o multiplicar los coeficientes de $A$ por una constante no nula (que puede ser negativa). Por otra parte, con un cambio de referencia que preserva el triángulo de referencia y cambia el punto unidad, es posible reducir las ecuaciones anteriores a la forma canónica:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \pm\xi_0 \\ u_1 & = & \xi_1 \\ u_2 & = & \xi_2\,. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Entonces, un punto $P$ de coordenadas $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ es autoconjugado si se verifica que

$$u_0\xi_0 + u_1\xi_1 + u_2\xi_2 = 0,$$

donde $(u_0, u_1, u_2)$ son la coordenadas de su recta polar. Por (3.7), esto significa que la condición para que $P$ sea autoconjugado en el sistema de referencia mencionado, es que sus coordenadas verifiquen una de las dos condiciones siguientes:

$$\pm\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0.$$

Notemos que cuando escogemos el signo positivo, no hay puntos autoconjugados, con lo cual $A = diag(1, 1, 1)$ es la forma canónica de la matriz de una polaridad elíptica. El otro caso, esto es, cuando $A = diag(-1, 1, 1)$ se corresponde con la matriz de una polaridad hiperbólica. En este caso notemos que el lugar geométrico de los puntos autoconjugados tiene ecuación:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \xi_0^2,$$

es decir, se trata de la forma canónica de una cónica de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (recordemos que en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sólo existe esta cónica, puesto que la distinción habitual entre parábola, hipérbola y elipse se hace en el espacio afín y euclídeo).

En $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y para el caso de polaridades ordinarias, un razonamiento análogo al anterior nos permite escribir las ecuaciones de una polaridad en el espacio de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & a_{00}\xi_0 \\ u_1 & = & a_{11}\xi_1 \\ u_2 & = & a_{22}\xi_2 \\ u_3 & = & a_{33}\xi_3\,. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Por tanto, una polaridad es de *tipo (6,0)* o elíptica si todos los $\{a_{ii}\}_{i=0,1,2,3}$ tienen el mismo signo, puesto que en este caso no existen puntos autoconjugados, es decir, puntos cuyas coordenadas $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ verifican:

$$a_{00}\xi_0^2 + a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 = 0.$$

Es posible ver además que la condición necesaria y suficiente para la existencia de rectas autopolares es que se verifique $m^2 = a_{00}a_{11}a_{22}a_{33}$, $m \neq 0$, que sólo se satisface cuando dos de los coeficientes anteriores difieren en signo de los otros dos. De esta forma y realizando un cambio de referencia adecuado es posible obtener las ecuaciones canónicas de una polaridad ordinaria hiperbólica en el espacio, esto es;

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -\xi_0 \\ u_1 & = & \pm\xi_1 \\ u_2 & = & \xi_2 \\ u_3 & = & \xi_3\,. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

La elección del signo positivo da lugar a una polaridad de *tipo (3,3)*, mientras que con el signo negativo se obtiene la ecuación canónica de una polaridad de *tipo (2,4)* puesto que estas eran las que permitían la existencia de rectas autopolares. Notemos además que las figuras geométricas que forman los puntos autoconjugados tienen ecuaciones

$$-\xi_0^2 \pm \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

es decir, se trata de una cuádrica ovalada o reglada dependiendo de si se elige el signo positivo o el negativo, respectivamente.

## 3.5. Comportamiento afín de las polaridades

Aunque, como hemos visto, el espacio natural para tratar las polaridades sea el espacio proyectivo, en esta sección realizamos algunas consideraciones acerca del comportamiento de estas transformaciones en los correspondientes espacios afín $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ y euclídeo $\mathbb{E}^n$.

En primer lugar, recordemos que $\mathbb{E}^n$ se puede obtener a partir de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ eliminando un hiperplano cualquiera, al que nos referiremos como hiperplano del infinito y a continuación introduciendo una métrica. De hecho, geométricamente, una métrica se obtiene al escoger una polaridad elíptica en este hiperplano eliminado [Coxeter, 1993]. Así, una polaridad en $\mathbb{E}^n$ no es más que lo que queda de una polaridad en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, después de haber eliminado un hiperplano. Debido a esto, tanto en un espacio afín como en un espacio euclídeo se pierde la biyectividad de una polaridad. Esto supone, entre otras cosas, que posiblemente un punto, a saber, el polo del hiperplano eliminado (si no es un punto del infinito) y una infinidad de hiperplanos, carecen de imagen. Asimismo, en cuanto a la métrica se refiere, se pueden producir efectos similares a la inversión respecto de una circunferencia [Xambó, 1997]. De hecho, en [Coxeter y Greitzer, 1983] se definen las polaridades en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ usando los conceptos de perpendicularidad y de inversión respecto de una circunferencia.

En segundo lugar, veamos qué conjuntos de puntos e hiperplanos son transformados en hiperplanos y puntos del infinito al aplicarles una polaridad. Se detallan los casos posibles para polaridades en el plano por ser fáciles de ilustrar gráficamente. Un razonamiento análogo al seguido puede ser aplicado para deducir el comportamiento en el caso espacial.

Dada una polaridad, todas las rectas del plano euclídeo que son polares de los puntos de la recta del infinito $r_\infty$ carecen de imagen propia. Estas rectas forman un haz con intersección en el polo $R$ de $r_\infty$. Si dicho polo es un punto propio, estas rectas forman un haz propio de rectas concurrentes en dicho punto. En caso contrario, $R$ (respectivamente $r_\infty$) es autoconjugado y las rectas polares de los puntos del infinito forman un haz impropio de rectas paralelas.

En el caso de polaridades hiperbólicas, recordemos que éstas podían tratarse a partir de las cónicas proyectivas. Por tanto, el efecto que se observa en una polaridad de este tipo al tratarse desde un punto de vista afín o euclídeo tiene relación con lo que le ocurre a una cónica proyectiva cuando es tratada desde una perspectiva euclídea. En lo sucesivo supondremos que las cónicas euclídeas están referidas a una referencia euclídea de modo que se expresan en su forma canónica.

Cuando la cónica proyectiva no corta a $r_\infty$ sabemos que la cónica euclídea es una elipse y se comprueba que su centro es el polo de $r_\infty$ [Xambó, 1997]. Por tanto, las rectas que pasan por el centro son las rectas polares de los puntos de $r_\infty$. De esta forma parece lógico que rectas cercanas al centro de la elipse tengan su polo muy alejado de éste, puesto que, en teoría, éste debería ser "cercano" a la recta del infinito. Concretamente, esto se traduce en un *efecto de inversión*. Por ejemplo, si estamos tratando con la polaridad dada por una circunferencia de radio $r$, una recta a distancia $d$ del centro de la circunferencia, se transforma en un punto a distancia $\frac{r^2}{d}$ de dicho centro y viceversa.

Cuando la cónica proyectiva es tangente a $r_\infty$ sabemos que la cónica euclídea es una parábola. En este caso la recta del infinito es autoconjugada, de modo que su polo $R$ también es un punto impropio. Las rectas cuyos polos son los restantes puntos impropios constituyen un haz de rectas paralelas al eje $x$ si tenemos en cuenta que la parábola está en la forma canónica $y^2 = 2px$, donde $p$ es el parámetro focal de la misma.

Finalmente, cuando $r_\infty$ es secante a la cónica proyectiva, la cónica euclídea es una hipérbola, y $r_\infty$ la corta en dos puntos: $P_\infty$ y $Q_\infty$. En este caso, habrá dos rectas, las rectas polares de $P_\infty$ y de $Q_\infty$, que no tendrán imagen propia por la polaridad. Sabemos además, por ser la cónica el lugar geométrico de los puntos autoconjugados, que estas rectas son las tangentes a dicha cónica (hipérbola, vista en $\mathbb{E}^2$) en los puntos $P_\infty$ y $Q_\infty$, respectivamente. Usando nociones básicas de geometría algebraica, es sencillo encontrar dichas rectas en la referencia proyectiva en la que $r_\infty$ tiene ecuación $\{Z = 0\}$, asociada a la referencia afín o euclídea en la que la correspondiente cónica afín (hipérbola) está en la forma canónica $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$. Se puede comprobar que dichas rectas se corresponden, en $\mathbb{E}^2$, con las asíntotas de la hipérbola, de ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, respectivamente. De esta discusión y de las propiedades de una polaridad se concluye también que el centro $O$, intersección de las asíntotas de la hipérbola, es el polo de $r_\infty$. Esto, a su vez, nos dice que las rectas polares de los puntos de $r_\infty$ son justamente las rectas que pasan por $O$. De este modo se vuelve a producir un efecto de inversión análogo al descrito para el caso de cónicas $\mathcal{C}$ en las que $r_\infty \cap \mathcal{C} = \emptyset$ (elipses en $\mathbb{E}^2$).

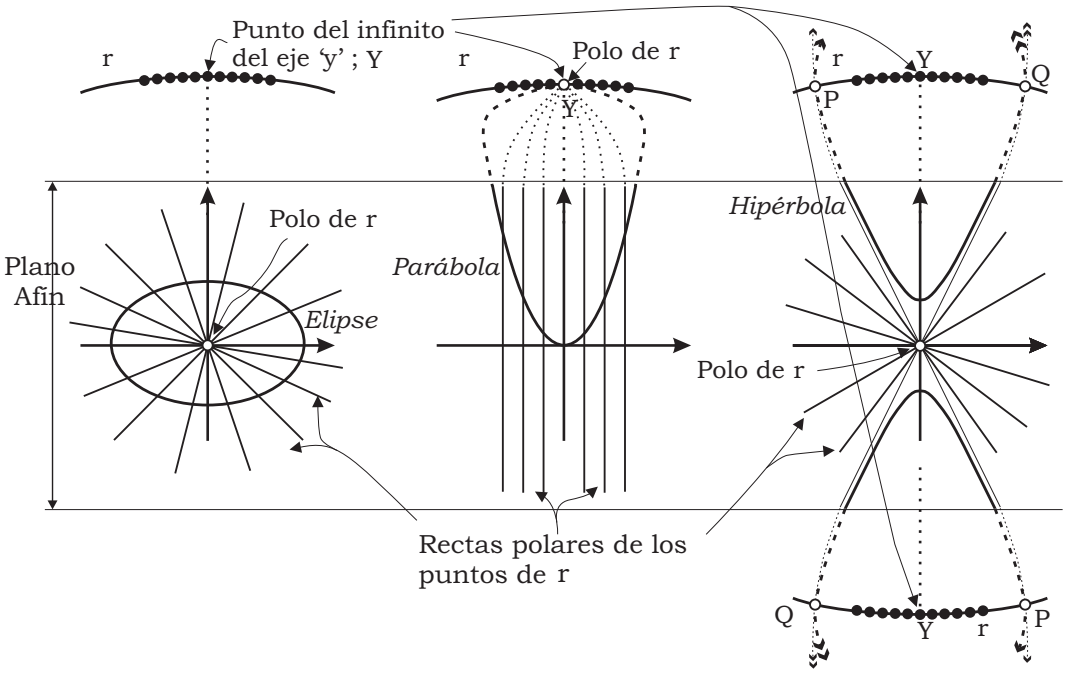



Figura 3.15: Diferentes patologías al considerar la polaridades hiperbólicas desde un punto de vista euclídeo atendiendo a su estudio a través de la cónica asociada y de la recta del infinito.

# Capítulo 4

# Curvas y superficies polares

Los conceptos de dualidad y polaridad introducidos en el capítulo anterior llevaban implícita la definición de configuraciones duales y polares de variedades lineales proyectivas. De hecho, resultaba ser que éstas volvían a ser variedades lineales, duales y polares de las primeras.

El presente capítulo persigue dos objetivos básicos. En primer lugar, extender la definición de figura dual a curvas y superficies de orden superior; en segundo lugar, introducir las técnicas necesarias para llevar a cabo el cálculo explícito de estas curvas y superficies duales. Para ello será necesaria la elección de un tipo concreto de transformaciones y en nuestro caso, como el lector podrá adivinar, las transformaciones usadas serán las polaridades.

Por otra parte y si no se dice lo contrario, consideraremos que nuestro entorno de trabajo será el plano euclídeo $\mathbb{E}^2$, para el caso de curvas, y el espacio euclídeo $\mathbb{E}^3$ para el caso de superficies, con la métrica habitual dada por una base ortonormal. No obstante, como es usual, a menudo los indentificaremos con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Por la elección de este entorno de trabajo, las observaciones hechas en la Sección 3.5 nos serán de gran utilidad en la utilización de dichas polaridades.

## 4.1. Cálculo de envolventes

La herramienta principal para el cálculo explícito de curvas y superficies polares es el cálculo de envolventes. En esta sección se exponen brevemente algunos de los resultados esenciales referentes a este tema. En todos ellos usaremos una descripción implícita, tanto de las curvas como de las superficies tratadas. En la bibliografía el lector podrá encontrar resultados análogos que usan una descripción paramétrica de éstas. Para una exposición más extensa sobre la teoría de envolventes, puede consultarse [Rutter, 2000], [Kiseliov y col., 1979], [Boltianski, 1977], [Cox y col., 1992], [Bruce y Giblin, 1984] y [EncMat, 1994].

### 4.1.1. Envolventes de familias de curvas

A continuación se presenta, de forma gráfica, qué se entiende por envolvente geométrica de una familia de curvas planas reales.

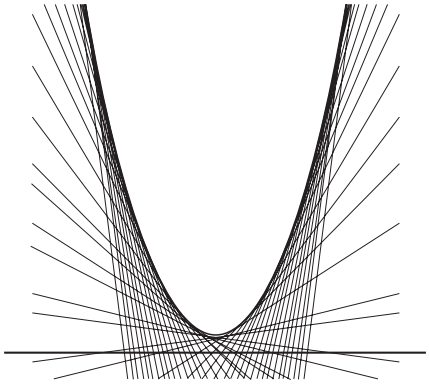


Figura 4.1: Parábola como envolvente de una familia de rectas.

La Figura 4.1 muestra una familia infinita de rectas. Observemos que éstas parecen concentrarse a lo largo de cierta curva. Esta curva aparente donde se amontonan todas las rectas se denomina envolvente geométrica de la familia de rectas. Podemos apreciar que en cada uno de sus puntos, dicha curva parece ser tangente a alguna de las rectas de la familia. En la siguiente figura se muestran algunos ejemplos más de familias de curvas y sus correspondientes envolventes geométricas. Notemos que dicha envolvente puede estar formada por varias curvas y también puede no estar definida.

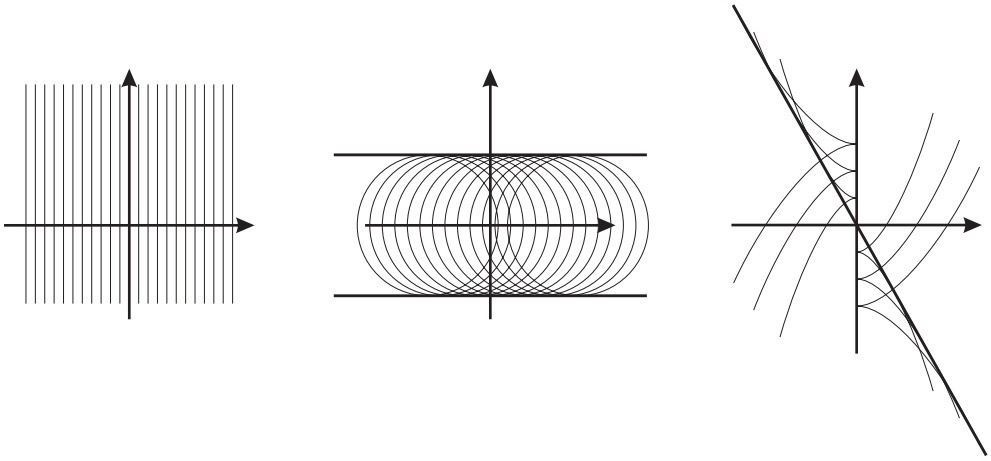


Figura 4.2: Envolventes de familias de curvas; (a) No existe la envolvente. (b) Envolvente formada por dos curvas (rectas). (c) Envolvente de una familia de curvas algebraicas con singularidades, esto es, puntos donde no existe la recta tangente.

Antes de proporcionar una definición de envolvente geométrica, se presenta el concepto de familia de curvas en $\mathbb{R}^2$.

**Definición.** Dado $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, consideremos la aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 \times (\alpha, \beta) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, \lambda) & \longmapsto & F(x, y, \lambda). \end{array}$$

Fijado un valor de la variable $\lambda = \lambda_0 \in (\alpha, \beta)$, la ecuación $F_{\lambda_0}(x, y) = 0$, donde $F_{\lambda_0}(x, y) = F(x, y, \lambda_0)$, define implícitamente una curva $C_{\lambda_0}$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Nos referiremos al conjunto $\{C_\lambda\}_{\lambda \in (\alpha,\beta)}$ como la *familia de curvas planas reales* definidas implícitamente por $F$. En esta definición, $\lambda$ actúa como un parámetro que indica la curva de la familia en la que nos estamos fijando.

Habitualmente consideraremos que la aplicación $F$ es polinómica en las variables $x$ e $y$, con lo cual hablaremos de familias de curvas algebraicas planas reales. Por otra parte, generalmente también supondremos que $\forall \lambda \in (\alpha, \beta)$ fijo se verifica

$$|\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x, y)|^2 + |\frac{\partial F_\lambda}{\partial y}(x, y)|^2 \neq 0,$$

en todo punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ de $C_\lambda$, excepto en un número finito de ellos. De esta forma y en virtud del teorema da la función implícita, también podremos hablar de familias de curvas diferenciables a trozos. Notemos que en el caso de familias de curvas algebraicas, la propiedad anterior se verifica excepto en los puntos singulares de cada una da las curvas de la familia.

**Definición.** Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda \in (\alpha,\beta)}$ una familia de curvas planas reales tales que $\forall \lambda \in (\alpha, \beta)$, la curva $C_\lambda$ tiene definida la recta tangente en todos sus puntos excepto en un número finito de ellos. Llamamos *envolvente geométrica estándar* de dicha familia, a la curva o conjunto de curvas $E$ que verifica las siguientes condiciones:

1. Todo punto de la curva $E$ pertenece a alguna de las curvas de la familia $\{C_\lambda\}_{\lambda \in (\alpha,\beta)}$.
2. En todo punto $P$ de $E$ para el cual esté definida la recta tangente a $E$ en $P$, se cumple que $T_P E = T_P C_\lambda$, donde $\lambda \in (\alpha, \beta)$ verifica la propiedad anterior, de manera que $P \in \{E \cap C_\lambda\}$.

Notemos que cabe la posibilidad de que $E = \emptyset$, en cuyo caso decimos que la familia de curvas carece de envolvente geométrica estándar (ver Figura 4.2 ).

La definición anterior es intuitiva aunque simple si pretendemos recoger en ella todas las patologías que aparecen al intentar determinar esta "curva aparente" que define una familia de curvas arbitrarias. De hecho, existen otras definiciones de envolvente de una familia de curvas que proporcionan lugares geométricos diferentes [Rutter, 2000, Bruce y Giblin, 1984, Boltianski, 1977]. Pese a todo, teniendo en cuenta nuestros propósitos, tiene sentido considerar esta definición.

Finalmente, con objeto de recoger en nuestra definición el mayor número de casos y en particular, el tratamiento de familias de rectas, también incluiremos en dicha definición el caso concreto de un conjunto de rectas concurrentes en un punto. En este y sólo en este caso, diremos que el punto común a todas la rectas es la envolvente geométrica de la familia de rectas. Además, esto permitirá un tratamiento consistente cuando describamos el proceso a seguir para obtener la curva dual a una dada.

Se plantea ahora encontrar una descripción, ya sea implícita o paramétrica, de la envolvente geométrica. Los siguientes resultados, cuya justificación podemos encontrar en [Bruce y Giblin, 1984, Boltianski, 1977, EncMat, 1994], permiten obtener la envolvente de una familia de curvas algebraicas planas reales, o como mínimo, determinar un conjunto de puntos entre los cuales se encuentra.

**Proposición 4.1.** *Sea* $\{C_\lambda\}_{\lambda\in(\alpha,\beta)}$ *la familia de curvas algebraicas planas reales definidas por la ecuación*

$$F(x,y,\lambda)=0, \quad con \quad F_\lambda \in \mathbb{R}[x,y]\,.$$

*Entonces, si* $E \neq \emptyset$*, todo punto* $P$ *de coordenadas* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *de la envolvente* $E$ *verifica el siguiente sistema de ecuaciones para algún* $\lambda\in(\alpha,\beta)$*:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(x,y,\lambda) & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = & 0\,. \end{array}\right. \tag{4.1}$$

El conjunto de puntos solución del sistema anterior es conocido como *discriminante* o *curva discriminante*. Por tanto, la proposición anterior afirma que la envolvente geométrica de una familia de curvas algebraicas está contenida en la curva discriminante.

**Ejemplo 1.** Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ la familia de circunferencias de radio unidad centradas en el eje de abscisas cuya ecuación viene dada por

$$F(x,y,\lambda)=(x-\lambda)^2+y^2-1=0\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

La curva discriminante se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x-\lambda)^2+y^2-1 & = & 0 \\ -2(x-\lambda) & = & 0. \end{array}\right.$$

En este caso, la solución es sencilla pues de la segunda ecuación se tiene que $x=\lambda$, con lo que la ecuación implícita de la curva discriminante es $y^2=1$. Por tanto, ésta consta de las rectas $\{y=1,\ y=-1\}$ y coincide con la envolvente geométrica tal y como se muestra gráficamente en la Figura 4.2. Además, es posible obtener una descripción paramétrica de ambas rectas usando el parámetro $\lambda$ de la familia

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(\lambda) & = & (\lambda,1), \\ \alpha_2(\lambda) & = & (\lambda,-1). \end{array}$$

**Ejemplo 2.** Consideremos la familia de rectas dadas por la ecuación

$$F(x,y,\lambda)=\lambda x+y-\lambda^3=0\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

La curva discriminante está formada por los puntos solución de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y - \lambda^3 & = & 0 \\ x - 3\lambda^2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Por tanto $\lambda = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}$, y sustituyendo en $F(x, y, \lambda) = 0$ obtenemos

$$\pm\sqrt{\frac{x}{3}}\,(x - \frac{x}{3}) + y = 0\,.$$

Se trata de la "parte positiva" ($y \geq 0$) y la "parte negativa" ($y \leq 0$) de la *parábola semicúbica*. Para obtener una expresión algebraica sólo hemos de manipular y elevar al cuadrado la expresión anterior para obtener

$$4x^3 - 27y^2 = 0\,.$$

Aunque en algunos casos, como en los ejemplos anteriores, el sistema (4.1) sirve para determinar exactamente todos los puntos de la envolvente geométrica $E$, en general existen otros puntos que también pueden satisfacer dicho sistema.

**Ejemplo 3.** La curva discriminante de la familia de cúbicas cuspidales dadas por

$$F(x, y, \lambda) = \lambda(y + \lambda)^2 - x^3 = 0$$

está determinada por

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda(y + \lambda)^2 - x^3 & = & 0 \\ (y + \lambda)^2 + 2\lambda(y + \lambda) & = & 0\,, \end{array}\right.$$

es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda(y + \lambda)^2 - x^3 & = & 0 \\ (y + \lambda)(y + 3\lambda) & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Sustituyendo los valores de $\lambda = -y$ y de $\lambda = -\frac{y}{3}$ en $F(x, y, \lambda) = 0$ obtenemos que dicha curva discriminante está formada por $\{x^3 = 0,\ \sqrt[3]{4}y + 3x = 0\}$. Notemos en la Figura 4.2 que la recta triple $x^3 = 0$ es el lugar geométrico de las cúspides de las cúbicas de la família y que la curva $\sqrt[3]{4}y + 3x = 0$ es la envolvente geométrica estándar buscada. Utilizando el parámetro $\lambda$, podemos encontrar una descripción paramétrica de las mismas

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(\lambda) & = & (0, \lambda), \\ \alpha_2(\lambda) & = & (\sqrt[3]{4}\lambda, -3\lambda) \quad (\textit{envolvente geométrica estándar}). \end{array}$$

La siguiente proposición proporciona condiciones necesarias y suficientes para la determinación de la envolvente geométrica estándar (ver [EncMat, 1994], tomo 8, pg 109-110).

**Proposición 4.2.** *Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in(\alpha,\beta)}$ la familia de curvas algebraicas planas reales definidas por la ecuación*

$$F(x, y, \lambda) = 0, \quad \textit{con} \quad F_\lambda \in \mathbb{R}[x, y]\,,$$

*de manera que $\forall\lambda \in (\alpha, \beta)$, $C_\lambda$ no tiene puntos singulares. Si $E \neq \emptyset$, la condición necesaria y suficiente que verifican los puntos de la envolvente $E$ es*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}(x, y, \lambda) \neq 0, \qquad \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial x}(x, y, \lambda) & \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial y}(x, y, \lambda) \end{array}\right| \neq 0, \tag{4.2}$$

*además de la condición* (4.1).

### 4.1.2. Envolventes de familias biparamétricas de superficies

En este punto, el lector puede ya imaginar que la envolvente geométrica de una familia biparamétrica de superficies no es más que la extensión del mismo concepto visto anteriormente para familias de curvas; se trata de una superficie tal que en cada uno de sus puntos es tangente a alguna de las superficies de la familia.

**Definición.** Dados $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, $(\gamma, \delta) \subseteq \mathbb{R}$ y la aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^3 \times (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, \lambda, \mu) & \longmapsto & F(x, y, z, \lambda, \mu), \end{array}$$

y fijados dos valores para las variables $\lambda = \lambda_0 \in (\alpha, \beta)$ y $\mu = \mu_0 \in (\gamma, \delta)$, la ecuación $F_{\lambda_0,\mu_0}(x, y, z) = 0$, donde $F_{\lambda_0,\mu_0}(x, y, z) = F(x, y, z, \lambda_0, \mu_0)$, define implícitamente una superficie $S_{\lambda_0,\mu_0}$ en $\mathbb{R}^3$. Nos referiremos al conjunto $\{S_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)}$ como la *familia biparamétrica de superficies reales* definidas implícitamente por $F$. Análogamente al caso de curvas, $\lambda$ y $\mu$ actúan como parámetros que indican la superficie de la familia en la que nos estamos fijando.

**Definición.** Sea $\{S_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)}$ una familia de superficies reales tales que $\forall(\lambda, \mu) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, la superficie $S_{\lambda,\mu}$ tiene definido el plano tangente en todos sus puntos excepto en un número finito de ellos. Llamamos *envolvente geométrica estándar* de la familia de superficies a la superficie o conjunto de superficies $E$ que verifican las siguientes condiciones:

1. Todo punto $P$ de coordenadas $(u, v)$ de la superficie $E$ pertenece a alguna de las superficies de la familia $\{S_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)}$, $(\lambda, \mu) = (\lambda(u, v), \mu(u, v))$. Además, supondremos que en ningún valor de $(u, v)$ dentro del espacio de parámetros de la envolvente $E$ existe una función $\phi \in \mathcal{C}^1$ tal que $\lambda(u, v) = \phi(\mu(u, v))$.

2. En todo punto $P$ de $E$ para el cual esté definido el plano tangente a $E$ en $P$, se cumple que $T_P E = T_P S_{\lambda,\mu}$, donde $(\lambda, \mu) \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ verifica la propiedad anterior, de manera que $P \in \{E \cap S_{\lambda,\mu}\}$.

Si $E = \emptyset$, decimos que la familia de superficies carece de envolvente geométrica estándar. Igual que en el caso de curvas, incluiremos dentro de la definición el caso de una familia de planos concurrentes en un punto y diremos que dicho punto es la envolvente geométrica de la familia de planos. Nuevamente está convención nos permitirá realizar un tratamiento consistente cuando tratemos de obtener la superficie polar de una superficie dada.

El cálculo de envolventes geométricas en el caso de familias de superficies algebraicas reales se basa en las siguientes proposiciones, análogas a las Proposiciones 4.1 y 4.2 de la sección anterior (ver [EncMat, 1994]).

**Proposición 4.3.** *Sea* $\{S_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)}$ *la familia biparamétrica de superficies algebraicas reales definidas por la ecuación*

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=0, \quad con \quad F_{\lambda,\mu}\in\mathbb{R}[x,y,z]\,,$$

*de manera que* $\forall(\lambda,\mu)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$, $S_{\lambda,\mu}$ *no tiene puntos singulares, es decir, se verifica*

$$|\frac{\partial F_{\lambda,\mu}}{\partial x}(x,y,z)|^2+|\frac{\partial F_{\lambda,\mu}}{\partial y}(x,y,z)|^2+|\frac{\partial F_{\lambda,\mu}}{\partial z}(x,y,z)|^2\neq 0\,.$$

*Entonces, si* $E\neq\emptyset$, *todo punto* $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *de la envolvente* $E$ *está incluida en la superficie discriminante determinada por el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(x,y,z,\lambda,\mu) & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}(x,y,z,\lambda,\mu) & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial\mu}(x,y,z,\lambda,\mu) & = & 0\,. \end{array}\right. \tag{4.3}$$

**Proposición 4.4.** *La condición para que la superficie discriminante y la envolvente geométrica coincidan es que en todo punto de la primera, se verifiquen las siguientes condiciones adicionales:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial\mu}(x,y,z,\lambda,\mu) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial\mu\partial\lambda}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}(x,y,z,\lambda,\mu) \end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial\mu\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial^2 F}{\partial\mu\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu) & \frac{\partial^2 F}{\partial\mu\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu) \end{vmatrix}\neq 0.$$

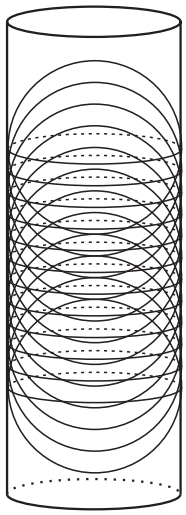


Figura 4.3: Envolvente geométrica de una familia de esferas.

## 4.2. Cálculo efectivo de curvas y superficies polares

Ya vimos que una propiedad muy importante y exclusiva de los espacios proyectivos era la dualidad existente en el comportamiento de puntos e hiperplanos. Esta especie de "simetría", que otorga el mismo grado de importancia a dichos elementos, nos sugiere la posibilidad de considerar definiciones de curvas y superficies alternativas a las habituales. Así, en Geometría Diferencial Proyectiva, una superficie se puede considerar como una familia biparamétrica de puntos y, además, como la envolvente de una familia biparamétrica de planos [EncMat, 1994]. Por otra parte y como ya dijimos, generalmente usaremos descripciones paramétricas y más concretamente polinómicas, de los trozos de curvas y superficies a tratar. Por tanto, con esta perspectiva y tal como se apunta en [EncMat, 1994], empezamos con las siguientes definiciones.

**Definición.** Sea $\overline{C}$ una curva diferenciable en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, definida como lugar geométrico de los puntos que la forman y sea $\rho$ una polaridad arbitraria. Llamamos *curva dual* o *curva polar*de $\overline{C}$ por $\rho$ y la notaremos por $\overline{C}^*$ a la curva envolvente de la familia de rectas obtenidas al transformar por $\rho$ cada uno de los puntos de $\overline{C}$ realizando las identificaciones usuales entre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^\vee$ según indicamos en la Sección 3.4.

**Definición.** Sea $\overline{S}$ una superficie diferenciable en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, definida como lugar geométrico de los puntos que la forman y sea $\rho$ una polaridad arbitraria. Llamamos *superficie dual* o *superficie polar* de $\overline{S}$ por $\rho$ y la notaremos por $\overline{S}^*$ a la superficie envolvente de la familia de planos obtenidos al transformar por $\rho$ cada uno de los puntos de $\overline{S}$ y considerando nuevamente las identificaciones oportunas entre $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^\vee$.

Hemos de señalar que muchas de las características de $\overline{C}^*$ y $\overline{S}^*$ son independientes de la transformación $\rho$ escogida. Por ejemplo, si $\overline{C}$ es una curva algebraica de grado $d$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, el grado de $\overline{C}^*$ es siempre el mismo, sea cual sea la elección de $\rho$. Este es un ejemplo que muestra como al realizar determinados estudios que involucran el concepto de figura dual, no importa la obtención de una curva o superficie dual concreta. Esto es así en el presente trabajo, si bien, aunque en este sentido sea irrelevante la transformación elegida, si que habremos de tener en cuenta otros aspectos como el coste computacional al usar una u otra transformación o el comportamiento de las imágenes de los puntos (fenómenos de inversión que distorsionan y hacen intratables los aspectos métricos) si pretendemos tratarlos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. En otras palabras, puesto que nos proponemos restringir la definición anterior a los espacios afines (euclídeos) $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, donde la dualidad no existe de forma natural, es conveniente elegir una transformación adecuada a la curva o superficie para que el cálculo de su correspondiente dual sea "lo más euclídea posible", es decir, que permita soslayar las distorsiones métricas a las que hacía referencia antes.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se tiene la siguiente;

**Definición.** Sea $C$ una curva diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\overline{C}$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ su correspondiente extensión proyectiva. La curva dual de $C$ es $C^* = \overline{C}^* \cap \mathbb{R}^2$, que también podemos obtener como envolvente geométrica de las rectas (propias) imagen de los puntos de $C$ por $\rho$.

La diferencia al tratar con $C$ o con $\overline{C}$ a la hora de definir la curva dual es que usando $C \subseteq \mathbb{R}^2$ perdemos algunos puntos (puntos impropios). No obstante, en el caso en que $C$ sea una curva algebraica real, es posible demostrar que el número de puntos que se pierden al tratar una curva desde un punto de vista afín o euclídeo es finito.

**Definición.** Sea $S$ una superficie diferenciable en $\mathbb{R}^3$ y $\overline{S} \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ su extensión proyectiva. Entonces, la superficie dual de $S$ es $S^* = \overline{S}^* \cap \mathbb{R}^3$ o la superficie envolvente de la familia de planos (propios) que se obtiene a considerar las imágenes de los puntos de $S \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ por $\rho$.

Nuevamente hemos de tener en cuenta que prescindimos de los puntos de $\overline{S} \cap \pi_\infty$, donde $\pi_\infty$ hace referencia al plano del infinito de $\mathbb{R}^3$.

En general, no siempre tiene sentido buscar la envolvente geométrica de una familia de curvas o superficies, ya sea porque esta no existe o porque no sea posible obtener una descripción de la misma. Sin embargo, la particularidad del caso que nos ocupa, en el que tratamos únicamente con familias de rectas o de planos, nos permitará, como ahora veremos, obtener dicha envolvente en la mayor parte de los casos tratados.

### 4.2.1. Cálculo de curvas polares en $\mathbb{R}^2$

Esta sección versa sobre el cálculo de curvas duales en $\mathbb{R}^2$ según la definición dada anteriormente. Para ello y con objeto de usar las polaridades que, como ya se ha dicho, tienen su habitat natural en el plano proyectivo, será necesario utilizar las relaciones que dicho espacio mantiene con $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, sea $C$ una curva en el plano $\mathbb{R}^2$ y $\alpha$ una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ de ésta,

$$\begin{array}{rcl} \alpha : (a,b) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \alpha(t) = (x(t), y(t)). \end{array}$$

Consideremos $\rho$ una polaridad con matriz asociada $Q_{3\times 3}$. Recordemos que $Q$ era una matriz simétrica y no singular. Notemos también la conveniencia de elegir una polaridad adecuada a la curva en el sentido comentado anteriormente ya que esto permitirá obtener resultados de fácil manipulación en $\mathbb{R}^2$. En $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, la parametrización anterior nos proporciona los puntos (propios) de coordenadas $(x(t), y(t), 1)$, $t \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Trabajando ahora en el plano proyectivo, la familia de rectas que se obtiene al transformar por $\rho$ cada uno de los puntos de la curva $C$ pensada en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ viene dada implícitamente por la siguiente expresión,

$$(x(t), y(t), 1)\ Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 0,$$

en la cual, $(\xi, \eta, \zeta)$ son las coordenadas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y donde $t$ actúa como parámetro de la familia. Hemos de observar que en este punto estamos haciendo uso de la identificación entre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^\vee$ comentada en la Sección 3.4.1. Operando se obtiene

$$(q_{11}x(t) + q_{12}y(t) + q_{13})\ \xi + (q_{12}x(t) + q_{22}y(t) + q_{23})\ \eta + (q_{13}x(t) + q_{23}y(t) + q_{33})\ \zeta = 0,$$

es decir, el resultado es una ecuación implícita, lineal en las variables $\xi$, $\eta$ y $\zeta$ de la forma

$$A(t)\,\xi + B(t)\,\eta + C(t)\zeta = 0.$$

La correspondiente familia de rectas afines (euclídeas) en $\mathbb{R}^2$ viene dada por la expresión

$$A(t)\,x + B(t)\,y + C(t) = 0,$$

donde $x = \frac{\xi}{\zeta}$ y $y = \frac{\eta}{\zeta}$. La linealidad de la variables que comentábamos nos permitirá usar de forma sencilla los resultados referentes al cálculo de envolventes para obtener una parametrización de la curva polar respecto de $\rho$ usando el mismo parámetro $t$ que utilizamos para describir las rectas de la familia. En efecto, sólo hemos de eliminar el parámetro $t$ del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{lcl} A(t)\,x + B(t)\,y + C(t) & = & 0 \\ \dot{A}(t)\,x + \dot{B}(t)\,y + \dot{C}(t) & = & 0. \end{array}\right.$$

Usando la regla de Cramer es fácil realizar dicha eliminación para obtener la parametrización buscada

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{B(t)\dot{C}(t)-C(t)\dot{B}(t)}{A(t)\dot{B}(t)-B(t)\dot{A}(t)} \\ y(t) & = & \frac{C(t)\dot{A}(t)-A(t)\dot{C}(t)}{A(t)\dot{B}(t)-B(t)\dot{A}(t)}\,, \end{array}\right.$$

definida para todo $t \in (a,b)$ tal que $A(t)\dot{B}(t) - B(t)\dot{A}(t) \neq 0$. Además, puesto que para cualquier valor de $t$ la curva $\Gamma_t$ es una recta y por tanto una curva algebraica sin puntos singulares, hemos de esperar que, en general, obtengamos una parametrización local de la envolvente geométrica, es decir, de la curva dual (polar) buscada.

### 4.2.2. Cálculo la superficies polares en $\mathbb{R}^3$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en la sección anterior, sea $\alpha$ una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$de una superficie afín $S$ del espacio $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} \alpha : U \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \alpha(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,, \end{array}$$

donde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un subconjunto abierto. Asimismo, sea $\rho$ una polaridad con matriz asociada $Q_{4\times 4}$. Notemos que, a diferencia del caso plano, en este caso la matriz $Q$ puede ser una matriz simétrica o antisimétrica y evidentemente no degenerada.

Por otra parte, si consideramos la imagen de la parametrización anterior incluida en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha} : U \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \alpha(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v), 1)\,. \end{array}$$

En este caso la familia biparamétrica de planos que se obtiene al transformar por $\rho$ cada uno de los puntos de la superficie $S$, viene dada implícitamente por

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v), 1)\ Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \nu \end{pmatrix} = 0,$$

donde $(\xi, \eta, \zeta, \nu)$ son la coordenadas proyectivas en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y $u$ y $v$ actúan como parámetros de la familia. Operando se obtiene un resultado análogo al caso plano, esto es:

$$A(u,v)\,\xi + B(u,v)\,\eta + C(u,v)\,\zeta + D(u,v)\,\nu = 0.$$

La correspondiente familia de superficies afines (euclídeas) en $\mathbb{R}^3$ se expresa como

$$A(u,v)\,x + B(u,v)\,y + C(u,v)\,z + D(u,v) = 0,$$

donde $x = \frac{\xi}{\nu}$, $y = \frac{\eta}{\nu}$ y $z = \frac{\zeta}{\nu}$. Usando entonces el cálculo de envolventes para famílias de superficies, sabemos que ésta verifica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A(u,v)\,x + B(u,v)\,y + C(u,v)\,z + D(u,v) & = & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial u}(u,v)\,x + \frac{\partial B}{\partial u}(u,v)\,y + \frac{\partial C}{\partial u}(u,v)\,z + \frac{\partial D}{\partial u}(u,v) & = & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial v}(u,v)\,x + \frac{\partial B}{\partial v}(u,v)\,y + \frac{\partial C}{\partial v}(u,v)\,z + \frac{\partial D}{\partial v}(u,v) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Utilizando nuevamente la regla de Cramer, obtenemos la siguiente parametrización;

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(u,v) & = & \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -D(u,v) & B(u,v) & C(u,v) \\ -D_u(u,v) & B_u(u,v) & C_u(u,v) \\ -D_v(u,v) & B_v(u,v) & C_v(u,v) \end{vmatrix}, \\ y(u,v) & = & \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A(u,v) & -D(u,v) & C(u,v) \\ A_u(u,v) & -D_u(u,v) & C_u(u,v) \\ A_v(u,v) & -D_v(u,v) & C_v(u,v) \end{vmatrix}, \\ z(u,v) & = & \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A(u,v) & B(u,v) & -D(u,v) \\ A_u(u,v) & B_u(u,v) & -D_u(u,v) \\ A_v(u,v) & B_v(u,v) & -D_v(u,v) \end{vmatrix}, \end{array} \right. \tag{4.4}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} A(u,v) & B(u,v) & C(u,v) \\ A_u(u,v) & B_u(u,v) & C_u(u,v) \\ A_v(u,v) & B_v(u,v) & C_v(u,v) \end{vmatrix}$$

ha de ser no nulo.

Puesto que la familia de superficies considerada es una familia de planos (en principio en posición general), en general la parametrización anterior coincide justamente con una parametrización de la envolvente geométrica de dicha familia, es decir, de la superficie dual (polar) buscada.

**Ejemplo.** Consideremos una porción de la parte superior de la esfera unidad parametrizada de la siguiente forma

$$\alpha(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}), \quad (u,v) \in U,$$

donde $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | \quad u^2+v^2 < (3/4)^2\}$. Sea $\rho$ la polaridad asociada al paraboloide $Q$ de ecuación proyectiva

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - 2ZW = 0,$$

cuya matriz proyectiva es

$$A_Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que los coeficientes de la familia biparamétrica de planos vienen dados por

$$(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}, 1)\, A_Q = (\frac{u}{4}, \frac{v}{9}, -1, -\sqrt{1-u^2-v^2}),$$

es decir, la ecuación implícita de la familia de planos, parametrizada por $u$ y $v$ es

$$\frac{u}{4}x + \frac{v}{9}y - z - \sqrt{1-u^2-v^2} = 0.$$

Una parametrización de la superficie discriminante que contiene la envolvente geométrica de dicha familia se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{u}{4}x + \frac{v}{9}y - z - \sqrt{1-u^2-v^2} & = & 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & = & 0 \\ \frac{y}{9} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & = & 0\,, \end{array} \right.$$

cuya solución es;

$$\alpha_P(u,v) = (\frac{-4u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{-9v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1-u^2-v^2}},), \quad (u,v) \in U.$$

De hecho, esta superficie no es más que un trozo del hiperboloide de dos hojas, de ecuación afín

$$\frac{81}{16}x^2 + 81y^2 - 81z^2 = -81.$$

Además, se comprueba que efectivamente coincide con la envolvente geométrica de la familia de planos.

# Capítulo 5

# Curvas y superficies de Bézier

En este capítulo se aplican los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4 para calcular las polares de curvas y superficies de Bézier. Descritas en forma paramétrica, se trata de un tipo de curvas y superficies especialmente adecuadas para el diseño geométrico de formas curvilíneas y superficiales. De hecho, históricamente, las curvas de Bézier en su versión polinómica aparecen en un informe interno de la compañía Citroën realizado por P. De Casteljau a finales de los años 50, donde se expone su tratamiento matemático con la intención de utilizarlas para el modelado de carrocerías de vehículos.

Para estudiar esta importante clase de curvas y superficies, empezaremos introduciendo los polinomios de Bernstein, herramienta indispensable para su tratamiento.

## 5.1. Polinomios de Bernstein

Los *polinomios de Bernstein* aparecieron originalmente en la aproximación de funciones continuas $f(x)$ en un cierto intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Dados $n + 1$ valores de $f(x)$ equiespaciados en $[a, b]$, la aproximación de Bernstein de orden $n$, $B_n[f(x)]$ de $f(x)$ está definida en términos de la base de polinomios de Bernstein de orden $n$, $\{b_k^n(x)\}_{k=0,1,\ldots,n}$. Además, la sucesión de aproximaciones obtenida converge uniformemente a la función $f(x)$ en el dominio $[a, b]$ estudiado.

**Definición.** La *base de polinomios de Bernstein* de grado $n$ en el intervalo $[a, b]$ viene dada por la expresión

$$b_k^n(t) = \binom{n}{k} \frac{(b-t)^{n-k}(t-a)^k}{(b-a)^n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

donde los coeficientes binomiales son

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & si \quad 0 \leq k \leq n, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Sin embargo, nosotros nos ceñiremos, si no se indica lo contrario, al intervalo $[0, 1]$, con lo cual la base de polinomios de Bernstein de grado $n$ se expresa de forma más sencilla como:

$$b_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Antes de pasar a explorar la importancia que tienen los polinomios de Bernstein en el estudio de las curvas y superficies de Bézier, veamos algunas de sus propiedades más interesantes. El lector puede consultar [Farin, 1997, Piegl y Tiller, 1997, Goldman, 1995] para una exposición más completa.

1. ***Recursividad.*** *Se verifica*

$$b_k^n(t) = (1-t)\, b_k^{n-1}(t) + t\, b_{k-1}^{n-1}(t), \qquad t \in [0,1],$$

*con*

$$b_0^0(t) \equiv 1,$$

*y*

$$b_k^n(t) \equiv 0 \qquad k \notin \{0, \ldots, n\}.$$

2. ***No negatividad.***

$$b_k^n(t) \geq 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \quad t \in [0,1].$$

3. ***Partición de la unidad.***

$$\sum_{k=0}^{n} b_k^n(t) = 1, \quad \forall t \in [0,1].$$

4. ***Valores extremos.***

$$b_0^n(0) = b_n^n(1) = 1.$$

5. ***Simetría.*** *Se verifica que para cualquier $n$, el conjunto de polinomios $\{b_k^n(t)\}$ es simétrico respecto de $t = \frac{1}{2}$, es decir $b_k^n(t) = b_{n-k}^n(1-t)$, $t \in [0,1]$.*

## 5.2. Curvas de Bézier

**Definición.** Una *curva de Bézier de grado $n$* en $\mathbb{E}^2$ es una curva que admite una representación paramétrica de la forma

$$\alpha_{CB^n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i\, b_i^n(t), \quad t \in [0,1], \tag{5.1}$$

donde $\{b_i^n(t)\}_{i=0,1,\ldots,n}$ es la base de polinomios de Bernstein de grado $n$ en la variable $t$ y $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ son las coordenadas de $n+1$ puntos del espacio $\mathbb{E}^2$ en una cierta referencia. Los puntos anteriores se denominan *puntos de control* o *puntos de Bézier* y el polígono $\mathbf{P}$ que determinan, *polígono de control* o *polígono de Bézier* de la curva $CB^n$.

El principal algoritmo utilizado en la manipulación de polinomios de Bernstein es el *algoritmo de De Casteljau* [Farin, 1997, Piegl y Tiller, 1997] que permite evaluar polinomios expresados en dicha base, jugando un papel análogo al que realiza el algoritmo de Horner en la evaluación de polinomios expresados en la base de potencias. El algoritmo es el siguiente:

**Entrada.** $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, *n puntos del plano y* $t_0 \in [0,1]$.
**Salida.** *Evaluación del polinomio en el parametreo* $t = t_0$.

*Se considera la recurrencia siguiente:*

$$b_i^r(t_0) = (1-t)\, b_i^{r-1}(t_0) + t\, b_{i+1}^{r-1}(t_0), \qquad r = 1, ..., n, \quad i = 0, ..., n-r$$

*donde* $b_i^0(t_0) = P_i$. *Entonces,* $b_0^n(t_0)$ *es el punto de la curva de Bézier de parámetro* $t = t_0$.

Figura 5.1: Algoritmo de De Casteljau.

Algunas de las propiedades más interesantes de este tipo de curvas son las siguientes

1. **Manipulación y robustez.** El *algoritmo de De Casteljau* nos permite calcular $\alpha_{CB^n}(t_0)$, $t_0 \in [0,1]$, en una curva de Bézier de grado $n$, usando la descripción anterior mediante polinomios de Bernstein y de forma sencilla. Aunque dicha evaluación es menos eficiente que la homóloga cuando la base de polinomios usada es la de potencias, esto es, usando el algoritmo de Horner, el algoritmo de De Casteljau es menos propenso a errores de redondeo [Farin, 1997]. Además, la expresión en forma de Bézier es mucho más intuitiva geométricamente puesto que los puntos de control nos permiten gobernar la geometría de la curva muy fácilmente (ver Figura 5.2), haciendo esta representación especialmente apta para el diseño geométrico de formas.

2. **Invariancia por transformaciones de semejanza en el plano euclídeo.** Esta importante propiedad nos permite usar los siguientes procedimientos asegurando el mismo resultado en ambos; (1) primero, calcular el punto $\alpha_{CB^n}(t_0)$ y después aplicar una de estas transformaciones; (2) primero, aplicar dicha transformación al polígono de control y después evaluar el polígono transformado en el valor $t = t_0$ del parámetro de la curva. Un ejemplo práctico de la utilidad de esta propiedad es el siguiente; supongamos que queremos visualizar una curva de Bézier cúbica, $CB^3$, evaluándola en 100 puntos que guardamos en una tabla. Imaginemos que ahora queremos dibujar la curva después de aplicarle una rotación. Podemos coger los 100 puntos previamente calculados y aplicarles la rotación o, por el contrario, podemos aplicar la rotación a los 4 puntos de control y después evaluar 100 veces en los parámetros adecuados para visualizarla. Mientras en el primer método se requieren 100 aplicaciones de la rotación, en el segundo sólo son necesarias 4.

3. **Invariancia por tranformaciones paramétricas afines.** El algoritmo de De Casteljau funciona igual en cualqier intervalo $[a, b]$ y no sólo en $[0, 1]$. Por tanto, ninguna transformación afín del espacio de parámetros afectará el resultado final. Algebraicamente, esta propiedad se expresa del siguiente modo:

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \, b_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \, b_i^n(\frac{u-a}{b-a}), \qquad t \in [0,1], \quad u \in [a,b],$$

donde $t : [a, b] \longrightarrow [0, 1]$ $(u \mapsto t(u) = \frac{u-a}{b-a})$.

4. **Propiedad de la envolvente convexa.** Como consecuencia de la no negatividad de los polinomios de Bernstein en el intervalo $[0, 1]$, esta propiedad establece que para $t \in [0, 1]$, $\alpha_{CB^n}(t)$ pertenece a la envolvente convexa del polígono de control de la curva.

5. **Polígono de control.** El polígono de control constituye una aproximación de la curva de Bézier.

6. **Propiedad de interpolación en los puntos frontera.** Las propiedades 3. y 4. de la Sección 5.1 permiten demostrar fácilmente que una curva de Bézier pasa por sus puntos de control extremos. Es decir $\alpha_{CB^n}(0) = \mathbf{P}_0$ y $\alpha_{CB^n}(1) = \mathbf{P}_n$. De hecho, cuando se diseña, los puntos extremos de una curva son de enorme importancia y por tanto es esencial tener un control directo sobre ellos.

Para una descripción más detallada y completa de las propiedades y aplicaciones de las curvas de Bézier, el lector puede consultar [Farin, 1997, Piegl y Tiller, 1997].

**Ejemplo 1.** En la Figura 5.2 se muestran ejemplos de curvas de Bézier de grado 3 ($n = 3$). Estas vienen dadas por la expresión siguiente, donde la única diferencia es la elección de los puntos de control:

$$\alpha_{CB^3}(t) = \mathbf{P}_0 \, (1-t)^3 + \mathbf{P}_1 \, 3t(1-t)^2 + \mathbf{P}_2 \, 3t^2(1-t) + \mathbf{P}_3 \, t^3.$$

Observemos que:

1. El polígono de control aproxima la forma de las curvas.
2. $\alpha_{CB^3}(0) = \mathbf{P}_0$ y $\alpha_{CB^3}(1) = \mathbf{P}_3$.
3. Las direcciones tangentes en $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_3$ son paralelas a $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$.
4. Las curvas están contenidas en la envolvente convexa de sus correspondientes polígonos de control.

Si bien la utilización de polinomios ofrece muchas ventajas, existen curvas y superficies que no admiten representaciones paramétricas polinómicas. Este es el caso de gran parte de las cónicas y cuádricas. No obstante, se puede extender la definición anterior a una familia más amplia de parametrizaciones, las *parametrizaciones racionales* sin perder las buenas propiedades que otorga el uso de una expresión basada en polinomios de Bernstein.

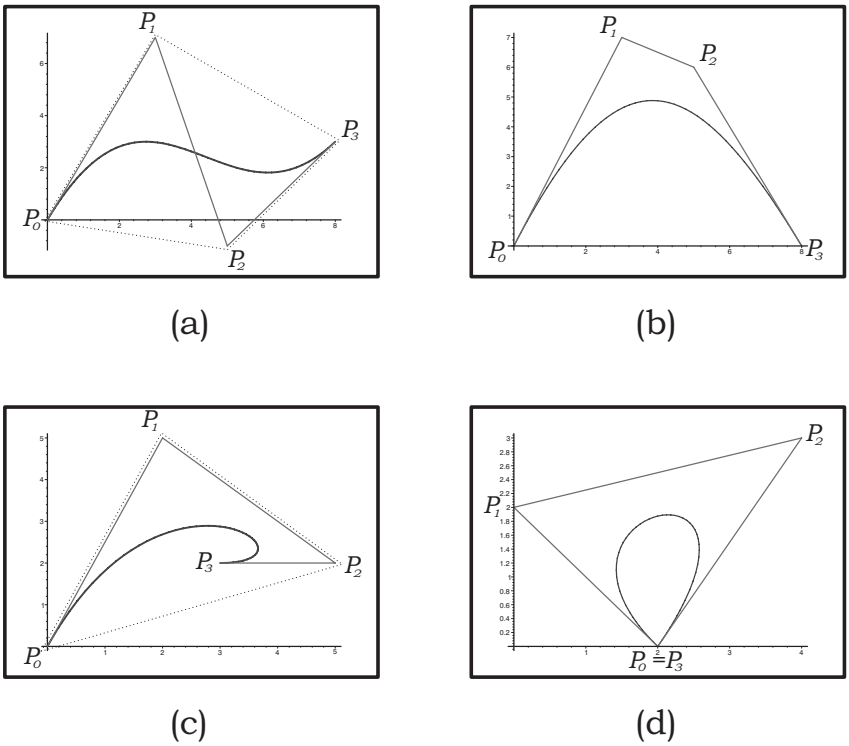



Figura 5.2: Ejemplos de curvas de Bézier de grado 3. **(a)** $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (5,4)$, $P_2 = (10,-1)$, $P_3 = (18,3)$. **(b)** $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (3,7)$, $P_2 = (5,6)$, $P_3 = (8,0)$. **(c)** $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (2,6)$, $P_2 = (4,2)$, $P_3 = (3,2)$. **(d)** $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (2,4)$, $P_2 = (4,1)$, $P_3 = (5,5)$.

**Definición.** Una *curva de Bézier racional de grado* $n$ en $\mathbb{E}^2$ es una curva cuya descripción paramétrica es del siguiente tipo

$$\alpha_{CBR^n}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \, \mathbf{P}_i \, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \, b_i^n(t)}, \quad t \in [0,1], \;\; w_i \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

donde, como antes, $\{b_i^n(t)\}_{i=0,1,\ldots,n}$ es la base de polinomios de Bernstein de grado $n$ en la variable $t$, $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ son las coordenadas de $n+1$ puntos del espacio $\mathbb{E}^2$ en una cierta referencia y $w_i$ son escalares denominados *pesos*. Normalmente supondremos que $w_i > 0$ para todo $i \in \{0,\ldots,n\}$, lo cual asegura que $W(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i \, b_i^n(t) > 0$ para todo $t \in [0,1]$.

Notemos que si todos los pesos valen uno, obtenemos una curva de Bézier no racional pues el denominador de la expresión es idénticamente uno, en virtud de la Propiedad 3 de los polinomios de Bernstein. En cualquier caso, siempre podemos escribir

$$\alpha_{CBR^n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \, r_i^n(t),$$

donde

$$r_i^n(t) = \frac{w_i b_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j\, b_j^n(t)},$$

con propiedades parecidas a las de los polinomios de Bernstein, entre las que podemos destacar la no negatividad, la propiedad de partición de la unidad o el valor en los extremos, esto es, $r_0^n(0) = r_n^n(1) = 1$ [Piegl y Tiller, 1997]. Además esto, nuevamente da lugar a propiedades análogas a las de las curvas de Bézier no racionales; propiedad de la envolvente convexa, invariancia respecto de transformaciones del plano euclídeo (homotecias, rotaciones,...), interpolación en los puntos extremos, etc.

**Ejemplo 2.** Consideremos la curva cuya parametrización viene dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}), \quad t \in [0,1].$$

La imagen en $\mathbb{E}^2$ es un cuadrante de la circunferencia unidad, tal y como se muestra en la Figura 5.3. Se puede comprobar que su expresión en forma de Bézier viene dada por

$$\alpha_{CBR^2}(t) = \frac{\mathbf{P}_0\, b_0^2(t) + \mathbf{P}_1\, b_1^2(t) + 2\,\mathbf{P}_2\, b_2^2(t)}{b_0^2(t) + b_1^2(t) + 2\, b_2^2(t)},$$

con $\mathbf{P}_0 = (1,0)$, $\mathbf{P}_1 = (1,1)$, $\mathbf{P}_2 = (0,1)$, $w_o = 1$, $w_1 = 1$ y $w_2 = 2$.

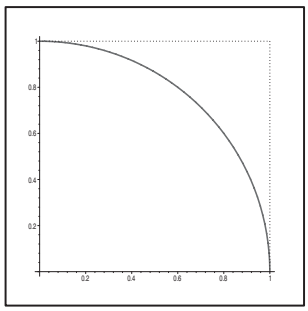



Figura 5.3: Primer cuadrante de la circunferencia de radio unidad.

Finalmente, no podemos acabar sin comentar la relación existente entre estas curvas y sus correspondientes curvas proyectivas. En efecto, podemos expresar (5.2) en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ asociado a $\mathbb{A}^2$ ($\mathbb{E}^2$ respectivamente) del siguiente modo:

$$\overline{\alpha}_{CBR^n}(t) = \sum_{i=0}^n w_i\, \overline{\mathbf{P}}_i\, b_i^n(t), \qquad t \in [0,1], \;\; w_i \in \mathbb{R},$$

donde $\overline{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i, 1)$ denota las coordenadas proyectivas del punto de coordenadas afines $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$. En componentes, la expresión es la siguiente:

$$\overline{\alpha}_{CBR^n}(t) = (\sum_{i=0}^n w_i\, x_i\, b_i^n(t), \sum_{i=0}^n w_i\, y_i\, b_i^n(t), \sum_{i=0}^n w_i\, b_i^n(t)), \qquad t \in [0,1], \;\; w_i \in \mathbb{R}.$$

Recordemos brevemente la relación que usamos entre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y el espacio afín usado; sabemos que si eliminamos una recta del plano proyectivo real, el resultado es un espacio afín. La recta eliminada es, en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, una recta indistingible del resto de rectas, pero en el espacio afín que obtenemos nos solemos referir a ella como la recta del infinito. Dicha recta está formada por todos aquellos puntos que son las intersecciones "en el infinito" de diferentes familias de rectas paralelas. Para poder trabajar teniendo en cuenta la estrecha relación entre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y todos los posibles espacios afines que podemos asociarle, es habitual considerar sólo algunos de estos. En general, la manipulación de esta relación se hace via la relación existente entre referencias afines y proyectivas [Xambó, 1997]. Así pues, si se trabaja en el espacio afín con coordenadas $(x, y)$ en un determinado sistema de referencia, entonces podemos tratar cada elemento proyectivamente considerando las coordenadas proyectivas $(X, Y, Z)$ en el sistema de referencia proyectivo asociado, donde las coordenadas afines y proyectivas están relacionadas según las siguientes expresiones:

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z}.$$

En esta referencia proyectiva, la recta del infinito queda descrita por la ecuación $\{Z = 0\}$. Por otra parte, si ahora quisieramos trabajar nuevamente de forma afín, solo tendríamos que considerar las relaciones anteriores, el habitual "dividir por $Z$", para volver a encontrarnos con una expresión afín. Nos solemos referir a este espacio como el espacio *afín* $\{Z = 0\}$. Sin embargo, es posible trabajar en otros espacios afines diferentes. Los más comunes son el espacio afín $\{X = 0\}$ y el $\{Y = 0\}$, de definición análoga al $\{Z = 0\}$.

## 5.3. Superficies de Bézier

**Definición.** Una *superficie de Bézier de grado* $n \times m$ en $\mathbb{E}^3$ es una superficie, en general con frontera, que admite una representación paramétrica de la forma

$$\alpha_{SB^{n\times m}}(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v), \qquad (u, v) \in [0, 1]^2, \tag{5.3}$$

donde $\{b_k^r(x)\}_{k=0,1,\ldots,r}$ es la base de polinomios de Bernstein de grado $r$ en la variable $x$ y $\{\mathbf{P}_{ij}\}_{\substack{i=0,1,\ldots,n\\ j=0,1,\ldots,m}}$ son las coordenadas de $(n + 1)(m + 1)$ puntos del espacio $\mathbb{E}^3$ en una cierta referencia. Nuevamente diremos que los puntos anteriores son los *puntos de control* o *puntos de Bézier* de la superficie. Llamaremos *poliedro de control* a la aproximación formada por los puntos de control y las caras que determinan.

Como sucedía con las curvas de Bézier, las propiedades de las superficies descritas en forma de Bézier las hacen más adecuadas para el modelado geométrico que el uso de una descripción basada en la base de potencias. Nuevamente se tienen propiedades análogas a las vistas para curvas:

1. **No negatividad de la base de polinomios.**

$$b_i^n(u)\, b_j^n(v) \geq 0, \qquad \forall i, j \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

2. **Partición de la unidad.**

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_i^n(u)\, b_j^n(v) = 1, \qquad \forall (u,v) \in [0,1]^2.$$

3. **Algoritmo de De Casteljau.** Se puede extender el algoritmo de De Casteljau para evaluar la parametrización con las mismas propiedades de robustez que en el caso de curvas de Bézier.

4. **Propiedad de la envolvente convexa.** $\alpha_{SB^{n\times m}}(u,v)$ está contenida en la envolvente convexa de sus puntos de control. Esta propiedad permite, por ejemplo, resolver problemas de colisión entre formas modeladas mediante parches de Bézier como pueden ser los brazos de un robot.

5. **Poliedro de control.** La red de control constituye una aproximación a la superficie de Bézier.

6. **Interpolación en los puntos extremos.** La superficie interpola los cuatro puntos de control que corresponden a los valores de los parámetros $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

Finalmente y por los mismos motivos que aducimos para las curvas, también se consideran las parametrizaciones racionales para describir superficies:

**Definición.** Una *superficie de Bézier racional* de grado $n \times m$ en $\mathbb{E}^3$ es una superficie, posiblemente con frontera, cuya descripción paramétrica es del siguiente tipo:

$$\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\mathbf{P}_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v)}, \qquad (u,v) \in [0,1]^2, \tag{5.4}$$

con las mismas notaciones que para superficies no racionales y donde, como en el caso de curvas, $\{w_{ij}\}_{\substack{i=0,1,\ldots,n\\ j=0,1,\ldots,m}}$ son escalares estrictamente positivos llamados *pesos*.

El haber asumido que $w_{ij} > 0$ para todo $i$ y $j$, nos asegura la extensión de las propiedades vistas antes para superficies no racionales. Además, notemos nuevamente que si $w_{ij} = 1$, obtenemos una superficie de Bézier no racional.

Son también válidos comentarios análogos acerca de la relación entre $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y todos los posibles espacios afines que podemos asociarle al eliminar un plano que, desde un punto de vista afín, llamamos plano del infinito. Así, en este caso lo habitual es trabajar con el espacio afín $\{W = 0\}$ que mantiene una relación idéntica que el espacio afín $\{Z = 0\}$ en el caso plano. Las expresiones que ligan coordenadas afines y proyectivas son las siguientes:

$$x = \frac{X}{W}, \qquad y = \frac{Y}{W}, \qquad z = \frac{Z}{W}.$$

Usándolas, es posible expresar 5.4 en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ como:

$$\overline{\alpha}_{SBR^{n\times m}}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\overline{\mathbf{P}}_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v), \qquad (u,v) \in [0,1]^2 \;\; w_{ij} \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

donde $\overline{\mathbf{P}}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, 1)$ denota las coordenadas proyectivas del punto de coordenadas afines $\mathbf{P}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$. Veamos la expresión en componentes:

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}_{SBR^{n\times m}}(u,v) = \\
&= \Big( \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}\, x_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v),\ \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}\, y_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v),\\
&\qquad \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}\, z_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v),\ \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^n(v)\Big).
\end{aligned}$$

## 5.4. Polar de una curva de Bézier

Consideremos una curva de Bézier racional en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de grado $n$, descrita paramétricamente por:

$$\overline{\alpha}_{CBR^n}(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} w_i \overline{\mathbf{P}}_i\, b_i^n(t), \quad t \in [0,1].$$

Supondremos que todos los puntos de control son puntos propios respecto del espacio afín $\{Z = 0\}$, de manera que en las correspondientes coordenadas proyectivas pueden expresarse como $\overline{\mathbf{P}}_i = (x_i, y_i, 1)$. De este modo, todos los puntos descritos por la parametrización son puntos propios respecto al espacio afín $\mathbb{R}^2$ asociado, habiutalmente, a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Recordemos que la parametrización era la siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{CBR^n}(t) &= (X(t), Y(t), W(t)) = \\
&= (\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\, b_i^n(t), \sum_{i=0}^{n} w_i y_i\, b_i^n(t), \sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)), \quad t \in [0,1].
\end{aligned}$$

La correspondiente curva en el espacio afín $\{Z = 0\}$ viene dada por

$$\alpha_{CBR^n}(t) \quad = \quad \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i\, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)}, \quad t \in [0,1], \quad \mathbf{P}_i = (x_i, y_i),$$

cuyas componentes son

$$\begin{aligned}
\alpha_{CBR^n}(t) &= (x(t), y(t)) = (\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)}) = \\
&= (\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)}, \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i y_i\, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)}), \quad t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Notemos que las condiciones impuestas a la parametrización nos permiten tratar el enfoque afín sin tener que molestarnos por elementos impropios, es decir, puntos en el infinito.

Como se ha visto en la Sección 4.2.1, el cálculo de una parametrización de la correspondiente curva polar requiere conocer las expresiones de $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $\dot{A}(t)$, $\dot{B}(t)$ y $\dot{C}(t)$,

donde

$$\begin{aligned} A(t) &= q_{11}\, x(t) + q_{21}\, y(t) + q_{31}, \\ B(t) &= q_{12}\, x(t) + q_{22}\, y(t) + q_{32}, \\ C(t) &= q_{13}\, x(t) + q_{23}\, y(t) + q_{33}, \end{aligned}$$

siendo $Q = (q_{ij})$ la matriz de la polaridad escogida.

Las primeras tres expresiones son sencillas pues no son más que combinaciones lineales a coeficientes reales de las componentes afines de la curva. Por linealidad se obtiene

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i (q_{11}\, x_i + q_{21}\, y_i + q_{31})\, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)}, \\ B(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i (q_{12}\, x_i + q_{22}\, y_i + q_{32})\, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)}, \\ C(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i (q_{13}\, x_i + q_{23}\, y_i + q_{33})\, b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(t)}. \end{aligned}$$

Para obtener las expresiones de $\dot{A}(t)$, $\dot{B}(t)$ y $\dot{C}(t)$ aplicamos los resultados presentados en [Saito y col., 1995], donde se deduce una fórmula para la *hodógrafa* de una curva de Bézier racional, es decir, de la curva que se obtiene al derivar respecto de $t$ la parametrización de una curva de Bézier. Cabe destacar que el grado del numerador es $2n-2$ frente a un esperado $2n-1$. En nuestro caso obtenemos

$$\frac{d}{dt}\, \alpha_{CBR}^n(t) = \frac{1}{W(t)^2} \sum_{i=0}^{2n-2} H_i\, b_i^{2n-2}(t),$$

con puntos de control cuyas coordenadas afines en la misma referencia vienen dadas por

$$H_i = (\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i) = \frac{1}{\binom{2n-2}{i}} \sum_{k=max(0,i-n+1)}^{\lfloor i/2 \rfloor} (i-2k+1) \binom{n}{k} \binom{n}{i-k+1}\, Dir(\overline{\mathbf{P}}_k, \overline{\mathbf{P}}_{i-k+1}),$$

donde $\overline{\mathbf{P}}_0, \ldots, \overline{\mathbf{P}}_n$ son los puntos de control de la curva original y

$$Dir(\overline{\mathbf{P}}_i, \overline{\mathbf{P}}_j) = w_i\, w_j\, (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) = w_i\, w_j\, (x_j - x_i, y_j - y_i).$$

Usando las expresiones anteriores podemos escribir:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= q_{11}\, \dot{x}(t) + q_{21}\, \dot{y}(t) = \\ &= q_{11}\, \frac{\sum_{i=0}^{2n-2} \tilde{x}_i\, b_i^{2n-2}(t)}{W(t)^2} + q_{21}\, \frac{\sum_{i=0}^{2n-2} \tilde{y}_i\, b_i^{2n-2}(t)}{W(t)^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{2n-2} (q_{11}\, \tilde{x}_i +\, q_{21}\, \tilde{y}_i) b_i^{2n-2}(t)}{W(t)^2}, \end{aligned}$$

Y de forma análoga:

$$\begin{aligned}
\dot{B}(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{2n-2}(q_{12}\,\tilde{x}_i + q_{22}\,\tilde{y}_i)b_i^{2n-2}(t)}{W(t)^2}, \\
\dot{C}(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{2n-2}(q_{13}\,\tilde{x}_i + q_{23}\,\tilde{y}_i)b_i^{2n-2}(t)}{W(t)^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, sólo hemos de realizar productos del estilo

$$\sum_{i=0}^{2n-2} a_i\, b_i^{2n-2}(t)\ \sum_{j=0}^{n} c_j\, b_j^{n}(t),$$

que se obtienen fácilmente usando los resultados de [Farouki y Rajan, 1987] donde se expresa el producto de dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ en forma de Bernstein de grados $m$ y $n$, $m \geq n$, con coeficientes $\{a_i\}_{0\leq i\leq m}$ y $\{c_j\}_{0\leq j\leq n}$ respectivamente, de la forma siguiente:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\, b_i^{m}(x)\ \sum_{j=0}^{n} c_j\, b_j^{n}(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{m+n} r_k\, b_k^{m+n}(x),$$

siendo

$$r_k \quad = \quad \sum_{l=max(0,k-n)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{l}\binom{n}{k-l}}{\binom{m+n}{k}}\, a_l c_{k-l}.$$

Por tanto, particularizando a nuestro caso, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{i=0}^{2n-2} a_i\, b_i^{2n-2}(t)\ \sum_{j=0}^{n} c_j\, b_j^{n}(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{3n-2} r_k\, b_k^{3n-2}(t),$$

con

$$r_k \quad = \quad \sum_{l=max(0,k-n)}^{min(2n-2,k)} \frac{\binom{2n-2}{l}\binom{n}{k-l}}{\binom{3n-2}{k}}\, a_l c_{k-l}. \tag{5.6}$$

Aplicando estos resultados, se obtiene una fórmula que, aunque de considerable complejidad, expresa una parametrización de la curva polar de una curva de Bézier racional.

$$\begin{aligned}
x^p(t) &= \frac{\frac{1}{W(t)^3}\ \sum_{k=0}^{3n-2}(B\dot{C}_k - C\dot{B}_k)\, b_k^{3n-2}(t)}{\frac{1}{W(t)^3}\ \sum_{k=0}^{3n-2}(A\dot{B}_k - B\dot{A}_k)\, b_k^{3n-2}(t)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{3n-2}(B\dot{C}_k - C\dot{B}_k)\, b_k^{3n-2}(t)}{\sum_{k=0}^{3n-2}(A\dot{B}_k - B\dot{A}_k)\, b_k^{3n-2}(t)}, \\
y^p(t) &= \frac{\sum_{k=0}^{3n-2}(C\dot{A}_k - A\dot{C}_k)\, b_k^{3n-2}(t)}{\sum_{k=0}^{3n-2}(A\dot{B}_k - B\dot{A}_k)\, b_k^{3n-2}(t)},
\end{aligned}$$

donde $A\dot{B}_k, B\dot{A}_k, A\dot{C}_k, \ldots$ denotan el coeficiente $r_k$ de la ecuación 5.6, particularizado a los productos $A(t)\dot{B}(t), \ldots$, respectivamente. Notemos que vuelve a ser una curva de Bézier racional cuyo grado, debido a las propiedades de la base de polinomios de Bernstein, es inferior o igual a $3n-2$.

## 5.5. Polar de una superficie de Bézier

El cálculo del parche polar de un parche de Bézier racional es análogo al caso de curvas, aunque de mayor complejidad computacional. En efecto, sea $\overline{\alpha}_{SBR^{n\times m}}$ una parametrización de la superficie de Bézier racional proyectiva de grado $n \times m$, $SBR^{n\times m}$.

$$\overline{\alpha}_{SBR^{n\times m}}(u,v) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\overline{\mathbf{P}}_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^m(v), \qquad (u,v) \in [0,1]^2.$$

Supondremos, como en el caso de curvas, que todos los puntos de control son puntos propios respecto del espacio afín $\{W = 0\}$, de manera que en coordenadas se pueden expresar como $\overline{\mathbf{P}}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, 1)$.

En componentes $\overline{\alpha}_{SBR^{n\times m}}$ se expresa

$$\overline{\alpha}_{SBR^{n\times m}}(u,v) \quad = \quad (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v), W(u,v))$$

con

$$\begin{aligned}
X(u,v) &= \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}x_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^m(v),\\
Y(u,v) &= \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}y_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^m(v),\\
Z(u,v) &= \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}z_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^m(v),\\
W(u,v) &= \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} w_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^m(v).
\end{aligned}$$

La correspondiente superficie afín viene dada por

$$\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\mathbf{P}_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^m(v), \qquad (u,v) \in [0,1]^2,$$

con $\mathbf{P}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, que en componentes tiene la siguiente expresión:

$$\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) \quad = \quad (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (\frac{X(u,v)}{W(u,v)}, \frac{Y(u,v)}{W(u,v)}, \frac{Z(u,v)}{W(u,v)}).$$

Para encontrar una parametrización de la superficie polar, hemos de conocer las siguientes expresiones y sus correspondientes derivadas respecto de las variables $u$ y $v$ respectivamente:

$$\begin{aligned}
A(u,v) &= q_{11}\, x(u,v) + q_{21}\, y(u,v) + q_{31}\, z(u,v) + q_{41},\\
B(u,v) &= q_{12}\, x(u,v) + q_{22}\, y(u,v) + q_{32}\, z(u,v) + q_{42},\\
C(u,v) &= q_{13}\, x(u,v) + q_{23}\, y(u,v) + q_{33}\, z(u,v) + q_{43},\\
D(u,v) &= q_{14}\, x(u,v) + q_{24}\, y(u,v) + q_{34}\, z(u,v) + q_{44},
\end{aligned}$$

donde $Q = (q_{ij})$ es la matriz de la polaridad escogida.

Sustituyendo el valor de las expresiones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
A(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}(q_{11}\,x_{ij} + q_{21}\,y_{ij} + q_{31}\,z_{ij} + q_{41})\,b_i^n(u)b_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\,b_i^n(u)b_j^m(v)},\\
B(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}(q_{12}\,x_{ij} + q_{22}\,y_{ij} + q_{32}\,z_{ij} + q_{42})\,b_i^n(u)b_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\,b_i^n(u)b_j^m(v)},\\
C(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}(q_{13}\,x_{ij} + q_{23}\,y_{ij} + q_{33}\,z_{ij} + q_{43})\,b_i^n(u)b_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\,b_i^n(u)b_j^m(v)},\\
D(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}(q_{14}\,x_{ij} + q_{24}\,y_{ij} + q_{34}\,z_{ij} + q_{44})\,b_i^n(u)b_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\,b_i^n(u)b_j^m(v)}.
\end{aligned}$$

Para calcular las correspondientes derivadas parciales haremos uso de los resultados de Saito, Wang y Sedeberg que usamos para el caso de curvas aplicados a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) &= (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)),\\
\frac{\partial}{\partial v}\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) &= (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)).
\end{aligned}$$

Esto nos da lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) = \frac{1}{W(u,v)^2}\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{l=0}^{2m} H_{k,l}^u\, b_k^{2n-2}(u)b_l^{2m}(v),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\alpha_{SBR^{n\times m}}(u,v) = \frac{1}{W(u,v)^2}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2m-2} H_{k,l}^v\, b_k^{2n}(u)b_l^{2m-2}(v),$$

donde,

$$\begin{aligned}
H_{k,l}^u &= (\widetilde{x}_{k,l}^u, \widetilde{y}_{k,l}^u, \widetilde{z}_{k,l}^u)\\
&= \frac{1}{\binom{2n-2}{k}\binom{2m}{l}}\sum_{i=i_0}^{\lfloor k/2\rfloor}\sum_{j=j_0}^{min(l,m)}(k-2i+1)\binom{n}{i}\binom{n}{k-i+1}\binom{m}{j}\binom{m}{l-j}Dir(\overline{\mathbf{P}}_{i,j}, \overline{\mathbf{P}}_{i-k+1,l-j}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{k,l}^u &= (\widetilde{x}_{k,l}^v, \widetilde{y}_{k,l}^v, \widetilde{z}_{k,l}^v)\\
&= \frac{1}{\binom{2n}{k}\binom{2m-2}{l}}\sum_{i=i_1}^{min(k,n)}\sum_{j=j_1}^{\lfloor l/2\rfloor}(l-2j+1)\binom{m}{j}\binom{m}{l-j+1}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}Dir(\overline{\mathbf{P}}_{i,j}, \overline{\mathbf{P}}_{k-i,j-l+1}),
\end{aligned}$$

siendo $i_0 = max(0, k-n+1)$ y $j_0 = max(0, l-m)$, y $i_1 = max(0, k-n)$ y $j_1 = max(0, l-m+1)$, respectivamente.

Por tanto, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
A_u(u,v) &= q_{11}\, x_u(u,v) + q_{21}\, y_u(u,v) + q_{31}\, z_u(u,v),\\
B_u(u,v) &= q_{12}\, x_u(u,v) + q_{22}\, y_u(u,v) + q_{32}\, z_u(u,v),\\
C_u(u,v) &= q_{13}\, x_u(u,v) + q_{23}\, y_u(u,v) + q_{33}\, z_u(u,v),\\
D_u(u,v) &= q_{14}\, x_u(u,v) + q_{24}\, y_u(u,v) + q_{34}\, z_u(u,v)
\end{aligned}$$

se obtienen expresiones como la siguiente:

$$\begin{aligned}
A_u(u,v) &= q_{11}\, \frac{\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{l=0}^{2m} \widetilde{x}^u_{k,l}\, b_k^{2n-2}(u) b_l^{2m}(v)}{W(u,v)^2} +\\
&+ q_{21}\, \frac{\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{l=0}^{2m} \widetilde{y}^u_{k,l}\, b_k^{2n-2}(u) b_l^{2m}(v)}{W(u,v)^2} +\\
&+ q_{31}\, \frac{\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{l=0}^{2m} \widetilde{z}^u_{k,l}\, b_k^{2n-2}(u) b_l^{2m}(v)}{W(u,v)^2},
\end{aligned}$$

es decir,

$$A_u(u,v) = \frac{\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{l=0}^{2m} (q_{11}\, \widetilde{x}^u_{k,l} + q_{21}\, \widetilde{y}^u_{k,l} + q_{31}\, \widetilde{z}^u_{k,l})\, b_k^{2n-2}(u) b_l^{2m}(v)}{W(u,v)^2}.$$

De este modo se obtienen $A_u$, $B_u$, $C_u$, $D_u$ y análogamente $A_v$, $B_v$, $C_v$ y $D_v$.

Finalmente, hemos de calcular los productos triples del tipo:

$$P{\cdot}Q_u{\cdot}R_v = (\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{ij} b_i^n(u) b_j^m(v)){\cdot}(\sum_{i=0}^{2n-2}\sum_{j=0}^{2m} q^u_{ij} b_i^{2n-2}(u) b_j^{2m}(v)){\cdot}(\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2m-2} r^v_{ij} b_i^{2n}(u) b_j^{2m-2}(v)).$$

Teniendo en cuenta que el producto de dobles sumatorios se puede expresar como a continuación se indica [Farouki y Rajan, 1988]:

$$\begin{aligned}
(\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2} a_{i_1,i_2} b_{i_1}^{n_1}(u) b_{i_2}^{n_2}(v)) \cdot (\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2} c_{j_1,j_2} b_{j_1}^{m_1}(u) b_{j_2}^{m_2}(v)) &=\\
= \sum_{k_1=0}^{n_1+m_1}\sum_{k_2=0}^{n_2+m_2} ac_{k_1,k_2} b_{k_1}^{n_1+m_1}(u) b_{k_2}^{n_2+m_2}(v),&
\end{aligned}$$

donde

$$ac_{k_1,k_2} = \sum_{l_1=max(0,k_1-m_1)}^{min(n_1,k_1)} \sum_{l_2=max(0,k_2-m_2)}^{min(n_2,k_2)} \frac{\binom{n_1}{l_1}\binom{m_1}{k_1-l_1}}{\binom{n_1+m_1}{k_1}} \frac{\binom{n_2}{l_2}\binom{m_2}{k_2-l_2}}{\binom{n_2+m_2}{k_2}}\, a_{l_1,l_2}\, c_{k_1-l_1,k_2-l_2},$$

obteniendo expresiones del tipo:

$$P \cdot Q_u \cdot R_v = \sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} pq^u r^v_{i,j}\, b_i^{5n-2}(u) b_i^{5m-2}(v).$$

Los coeficientes $pq^u r^v_{i,j}$ se obtienen aplicando dos veces la fórmula del producto para sumatorios dobles.

De este modo y según (4.4), después de operar se obtiene:

$$\begin{aligned}
x^p(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} wx^p_{i,j} b_i^{5n-2}(u) b_j^{5m-2}(v)}{\sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} w^p_{i,j} b_i^{5n-2}(u) b_j^{5m-2}(v),} \\
y^p(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} wy^p_{i,j} b_i^{5n-2}(u) b_j^{5m-2}(v)}{\sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} w^p_{i,j} b_i^{5n-2}(u) b_j^{5m-2}(v),} \\
z^p(u,v) &= \frac{\sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} wz^p_{i,j} b_i^{5n-2}(u) b_j^{5m-2}(v)}{\sum_{i=0}^{5n-2}\sum_{j=0}^{5m-2} w^p_{i,j} b_i^{5n-2}(u) b_j^{5m-2}(v)},
\end{aligned}$$

donde los coeficientes $wx^p_{i,j}$, $wy^p_{i,j}$, $wz^p_{i,j}$ y $w^p_{i,j}$ se obtienen según (4.4) usando dos veces el doble producto de sumatorios dobles.

# Capítulo 6

# Algoritmo de triedrización por polaridad

El presente capítulo describe el segundo método de triedrización implementado. En este caso se trata de un método basado en las propiedades de aquellas transformaciones que se comportan de un modo análogo a como funciona el principio de dualidad. El principal objetivo es mejorar los resultados obtenidos en el primer método de triedrización presentado en la Sección 2. Esta vez, se consigue una doble convergencia, tanto de los puntos de la poligonización como de sus vectores normales hacia los de la superficie original, manteniendo el grado tres en los vértices interiores y la planaridad de las caras, si bien, como se verá, en superficies con ensilladuras, el algoritmo puede generar aproximaciones que se autopenetran o caras que se autointersecan. Esto se debe, en gran medida, a lo restrictivo que resulta la utilización de este tipo de transformaciones en un espacio afín o euclídeo. Este punto queda pendiente de solución y requiere más atención en posibles extensiones futuras de este trabajo.

## 6.1. Algoritmo

Si bien el rango de aplicabilidad del algoritmo que se presenta no está limitado dentro del conjunto de superficies parametrizadas, en lo sucesivo se restringe al subconjunto de las superficies de Bézier. Esto supone una reducción en la complejidad de los cálculos a realizar, sin menguar, por otra parte, su aplicabilidad. Asimismo, para su aplicación a superficies paramétricas generales sería necesaria la utilización de un manipulador simbólico que permitiera un correcto manejo de las operaciones a realizar puesto que éstas pueden incrementar su complejidad de forma notable. El algoritmo consta de cuatro pasos que se describen a continuación.

**Paso 1. Elección de la polaridad.** Partiendo de una parametrización de la superficie a triedrizar, se selecciona una polaridad adecuada. Dicha selección es importante ya que de ello dependerá que se pueda evitar o no que la restricción de la polaridad a los puntos de nuestra superficie tengan como imagen puntos muy alejados, o en el infinito, en relación a las dimensiones de la superficie a triedrizar. El caso ideal es aquel en el que la superficie a triedrizar es una cuádrica, puesto que entonces la polaridad escogida es la polaridad

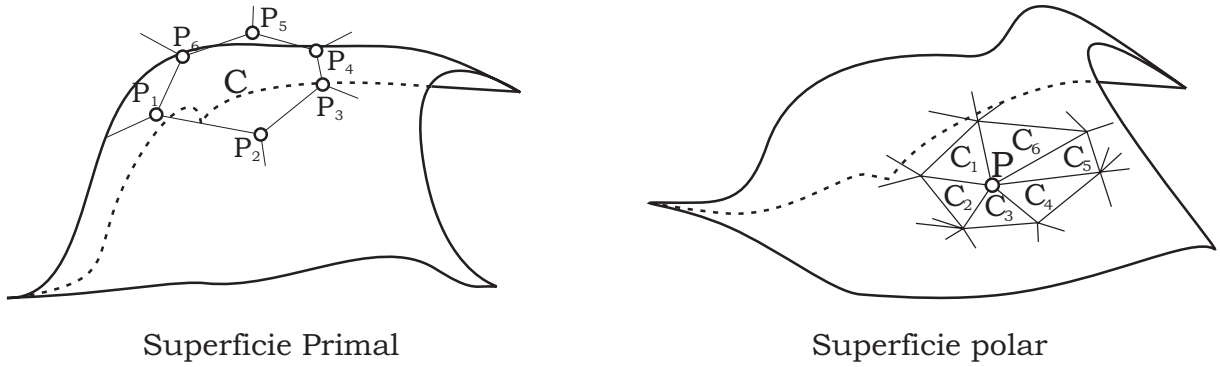



Figura 6.1: Al aplicar la polaridad inversa a una configuración de triángulos incidentes en un vértice de una triangulación de la superficie polar, obtenemos una configuración de vértices coplanares con grado 3 en la superficie primal.

respecto de ella misma. En esta situación recordemos que la superficie primal y la polar coincidían, al tratarse de figuras autopolares. Este hecho sugiere que, en una superficie genérica, una buena elección es tomar la polaridad cuya cuádrica asociada es lo más próxima posible a la superficie; elección que, por otra parte, nos restringe a polaridades hiperbólicas. A pesar de esto y de no haber podido profundizar más en este estudio, se considera un criterio razonable si se quieren evitar los desplazamientos hacia el infinito a los que se hacía referencia.

**Paso 2. Cálculo de la superficie polar.** Se obtiene la expresión analítica de una parametrización de la superficie polar respecto de la polaridad elegida mediante la aplicación de los resultados obtenidos en el Capítulo 4.

**Paso 3. Triangulación de la superficie polar.** A continuación, se genera una triangulación de la superficie polar obtenida. Por motivos que seguidamente veremos, pediremos que en dicha triangulación los triángulos vecinos sean lo menos coplanares posible.

**Paso 4. Inversión de la polaridad.** Finalmente, se aplica la polaridad inversa a todas las caras de la triangulación, obteniendo de esta forma una nube de puntos o vértices próxima a la superficie original. Asimismo y en virtud de las propiedades de una polaridad, todo vértice $V$ de la triangulación se transforma, a su vez, en un plano que contiene los vértices polares asociados a los triángulos incidentes con dicho vértice (ver Figura 6.1). Cuanto más coplanares son los triángulos incidentes con $V$, más cercanos estarán sus vértices correspondientes en la superficie primal, llegando incluso a producir polígonos con degeneraciones no deseadas causadas por vértices muy próximos. Es por ello que en el paso anterior se requería la menor coplanaridad posible entre triángulos vecinos. Finalmente, se conectan mediante aristas todos aquellos puntos cuyos triángulos asociados por la polaridad son vecinos, tal y como se observa en la Figura 6.1, en la cual, $P_i$ se corresponde con $C_i$, $i = 1, \ldots, 6$ y $C$ se corresponde con $P$.

**Algoritmo de triedrización por polaridad**

**Entrada:** *Ecuaciones paramétricas de la superficie original $S$ a triedrizar.*
**Salida:** *Triedrización de la superficie $S$.*

**Paso 1.** *Obtención de una polaridad adecuada.*
**Paso 2.** *Cálculo, mediante métodos analíticos, de una parametrización de la superficie polar (dual) respecto de la polaridad escogida en el Paso 1.*
**Paso 3.** *Triangulación de la superficie polar (dual).*
**Paso 4.** *Aplicación de la polaridad inversa a la seleccionada y colocación de las aristas correspondientes. De este modo todo vértice se transforma en una cara y toda cara (triangular) en un vértice con la propiedad de regularidad impuesta, obteniendo así la estructura polar (dual) de la triangulación.*

Figura 6.2: Algoritmo de triedrización por polaridad.

En lo referente a la complejidad del algoritmo, debemos tener en cuenta que los dos primeros pasos dependen en gran medida del método empleado para obtener la polaridad a usar y de la complejidad de la expresión analítica de la superficie a triedrizar, respectivamente. La complejidad de la triangulación de la superficie polar también dependerá del método utilizado. Como referencia podemos citar el algoritmo presentado en [Amenta y col., 1998], cuya complejidad es cuadrática en el número de puntos muestra escogidos en la superficie a triangular, debido al cálculo de una triangulación de Delaunay 3D, aunque se asegura que esta complejidad raramente se da. Finalmente, el Paso 4, se basa en calcular los vértices de la triedrización de la superficie primal al tiempo que se colocan las aristas correspondientes. Puesto que el número de tales vértices es lineal en el número $n$ de vértices de la triangulación de la superficie polar, la complejidad del paso cuatro también es lineal en $n$.

## 6.2. La aproximación por cuádricas

Como ya se ha señalado, el anterior algoritmo se adapta mejor a las superficies cuádricas ya que en estos casos nos ahorramos la aplicación de los dos primeros pasos. Esto también induce una variante al método propuesto, basada en una segmentación previa en cuádricas de la superficie a triedrizar. De hecho, en la literatura existen métodos que permiten aproximar una superficie mediante cuádricas diferentes que empalman con continuidad y suavidad, con error acotado inferior a una cierta tolerancia preestablecida [Froumentin, 1995]. Por tanto, mediante esta variante se eluden los pasos 1. y 2. del algoritmo general y da lugar a una nueva estrategia que intercambia un problema de manipulación analítica por uno de aproximación de superficies mediante parches cuadráticos que posteriormente habrá que enganchar para obtener la triedrización total. En la Figura 6.3 se muestra el pseudocódigo de la variante del algoritmo propuesta.

**Variante del algoritmo de triedrización por polaridad**

**Entrada:** *Ecuaciones paramétricas de la superficie original $S$ a triedrizar.*
**Salida:** *Triedrización de la superficie $S$.*

**Paso 1.** *Segmentación en parches cuadráticos de la superficie a triedrizar.*
**Paso 2.** *Aplicación de los pasos 3 y 4 del algoritmo general a cada uno de los parches cuadráticos, teniendo en cuenta que cada uno de ellos se polariza con respecto a la polaridad que definen.*
**Paso 3.** *Enganche de los parches primales obtenidos mediante las correspondientes polaridades. Dicho enganche se realiza de forma intercalada tal y como se explica a continuación.*

Figura 6.3: Variante del algoritmo de triedrización por dualidad.

Asimismo, si la dificultad para obtener una triedrización de una superficie arbitraria, medida en términos de complejidad para obtener los resultados buscados, varia de una zona a otra, es decir, si el problema de triedrización de superficies es un problema local, la variante del método propuesta sería más adecuada, puesto que la triedrización de cada parche cuadrático tendría una dificultad diferente e intuitivamente más ajustada a la del pedazo correspondiente de superficie a aproximar.

## 6.3. Resultados experimentales

Las pruebas realizadas con este segundo algoritmo se han enfocado primero hacia la triedrización de cuádricas. De este modo se puede apreciar el comportamiento de dicho algoritmo en el caso más sencillo, en el que desaparecen las dificultades propias de los dos primeros pasos, al utilizar como polaridad la dada por la misma cuádrica a triedrizar.

Nuevamente, ha sido de gran utilidad el software de visualización de imágenes *Geomview*, cuya interactividad nos ha permitido una fácil observación de las patologías obtenidas. Por otra parte, la obtención de las triangulaciones utilizadas se ha llevado a cabo utilizando el paquete de rutinas *Surface Evolver*.

Las Figuras 6.4 y 6.5 muestran, respectivamente, los resultados obtenidos en la triedrización de una superficie de ensilladura y de la parte superior de un elipsoide. En ellas se observa que se verifican la siguientes propiedades:

1. ***Planaridad de las "caras" de la aproximación.*** Esto es consecuencia directa de las propiedades de incidencia de una polaridad.

2. ***Grado tres en los vértices.*** Puesto que unimos sólo aquellos vértices cuyos triángulos correspondientes en la triangulación de la superficie polar son adyacentes, por construcción, cada vértice interno es de grado tres o, de forma equivalente, es adyacente a tres caras.

3. ***Orientación de la normal.*** Notemos como la orientación de todas las caras está mucho más acorde con la orientación de la superficie original que en los resultados del algoritmo de triedrización mediante diagramas de Voronoi presentado en el Capítulo 2.

Se habla de vértices correctos para diferenciarlos de aquellos que son resultado de intersecciones no esperadas entre las aristas de la aproximación, polar de la triangulación. La causa de este comportamiento es debida a un tratamiento afín de transformaciones que son propias del espacio proyectivo, las polaridades. En este sentido se han identificado dos problemas básicos.

- ***Comportamiento en el infinito.*** El primero y quizá, a priori, menos complejo, es el tratamiento del infinito. Evitar aquellos comportamientos en los que hay elementos que se transforman en otros que intersecan o son cercanos al hiperplano del infinito parece factible como apuntan los comentarios hechos en las Secciones 3.5 y 6.1.

- ***Autointersecciones de los polígonos.*** Por otra parte, evitar las autointersecciones parece mucho más complicado. El lector ya habrá apreciado que en la última etapa del algoritmo de la Figura 6.2, en el momento en que se crean las aristas de una cara, no es posible asegurar que el resultado obtenido no vaya a contener intersecciones entre pares de éstas. En otras palabras, no podemos asegurar que los vértices correspondientes a los triángulos de la triangulación de la superficie polar, se unan de acuerdo con el orden circular establecido por dichos triángulos en torno al vértice común y formen un polígono. A lo sumo es posible asegurar que se genera una cadena de aristas cerrada y plana. La Figura 6.6 muestra tres posibles uniones entre cinco vértices coplanares.

  En el caso de la polaridad asociada a la cuádrica imaginaria de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ y matriz asociada $Q = diag(1, 1, 1, 1)$, se puede apreciar cuando se presentan este tipo de comportamientos. Sólo hemos de notar que todo plano se transforma, por la polaridad, en un punto cuyas coordenadas vienen dadas por el extremo del vector normal del plano situado en el origen de coordenadas. La Figura 6.7 presenta dos situaciones diferentes en las que la concavidad o convexidad de las caras determina la aparición o no de autointersecciones.

  En efecto, elijamos un plano arbitrario $\pi$ que no pase por el origen de coordenadas. En tal caso siempre podremos escribir su ecuación de la forma $A\,x+B\,y+C\,z+1 = 0$. Calculemos las coordenadas $(P_1, P_2, P_3, 1)$ de su polo $\overline{P} \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Recordemos que sólo teníamos que realizar el producto de matrices:

  $$(P_1, P_2, P_3, 1) = (A, B, C, 1) \cdot I^{-1} = (A, B, C, 1).$$

  Por tanto, el punto afín correspondiente tiene coordenadas $(p_1, p_2, p_3) = (A, B, C)$, es decir, sólo hemos de colocar el vector normal del plano en el origen de coordenadas y su extremo nos marcará las coordenadas del polo $P$. En consecuencia, una configuración de caras con aristas convexas como la presentada en la Figura 6.7

(arriba) nos proporciona, en la figura polar, una cadena cerrada de aristas planas sin autointersecciones. Por otra parte observemos como la arista concava de la Figura 6.7 (abajo) provoca la aparición de una intersección de aristas en el polar cuando se sigue el orden de vecindad establecido por las caras triangulares.

Por otra parte, si tenemos en cuenta que toda polaridad es producto de una polaridad concreta y de una proyectividad, esto nos permite aplicar la interpretación anterior a cualquier otra polaridad escogida. La diferencia es que, en este caso, es más fácil visualizar las configuraciones de caras que dan lugar a este tipo de comportamientos no deseados.

Un estudio más profundo en esta dirección podría proporcionar métodos para adaptar algunos resultados proyectivos, sobretodo en lo relativo a transformaciones que funcionan de forma análoga a como lo hace el principio de dualidad, al ámbito de la geometría afín y métrica y evitar este tipo de comportamientos.

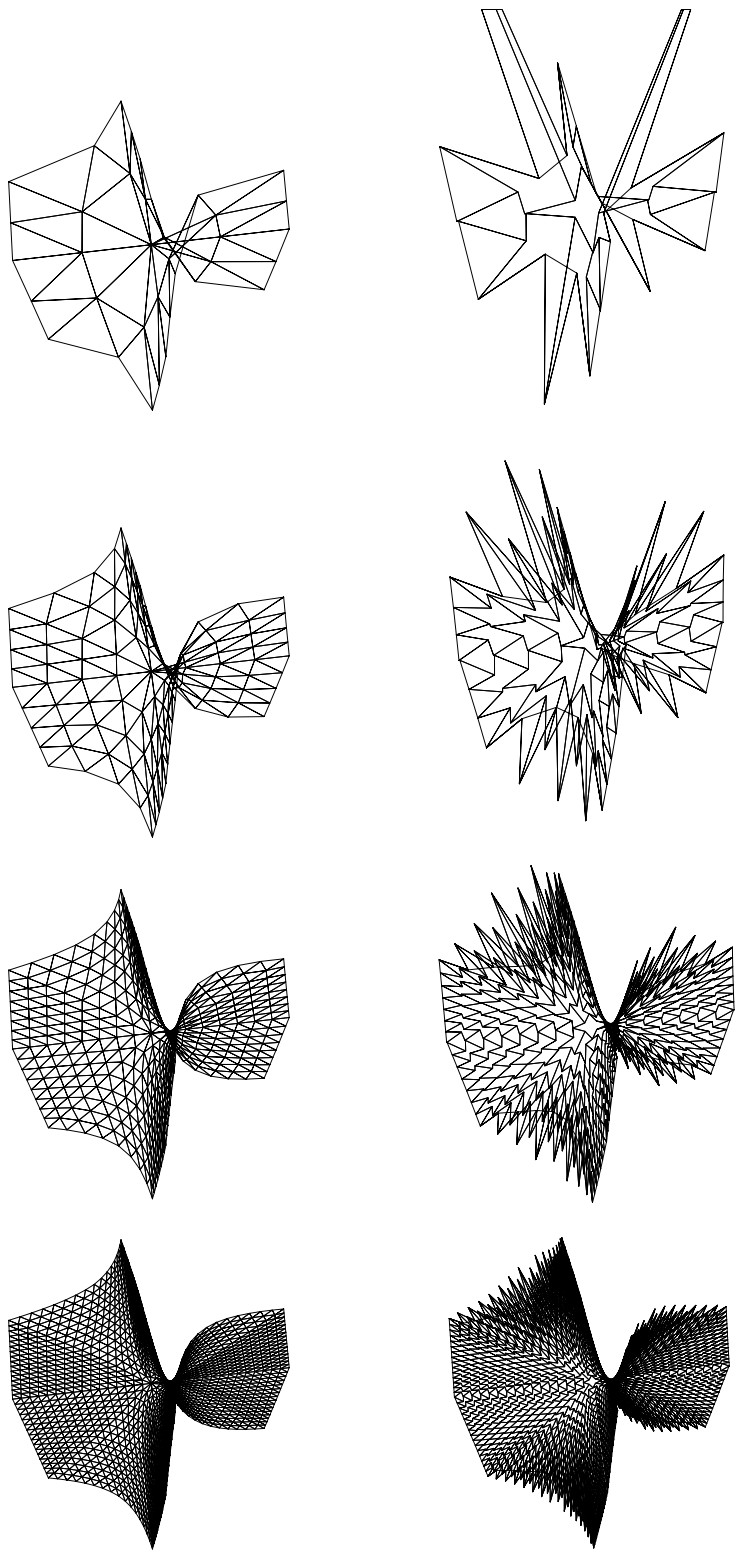


Figura 6.4: Triangulación de una superficie de ensilladura con diferentes niveles de detalle (izquierda) y la superficie triedrizada que la aproxima (derecha). Se ha usado la polaridad respecto a ella misma de modo que es una figura autopolar.

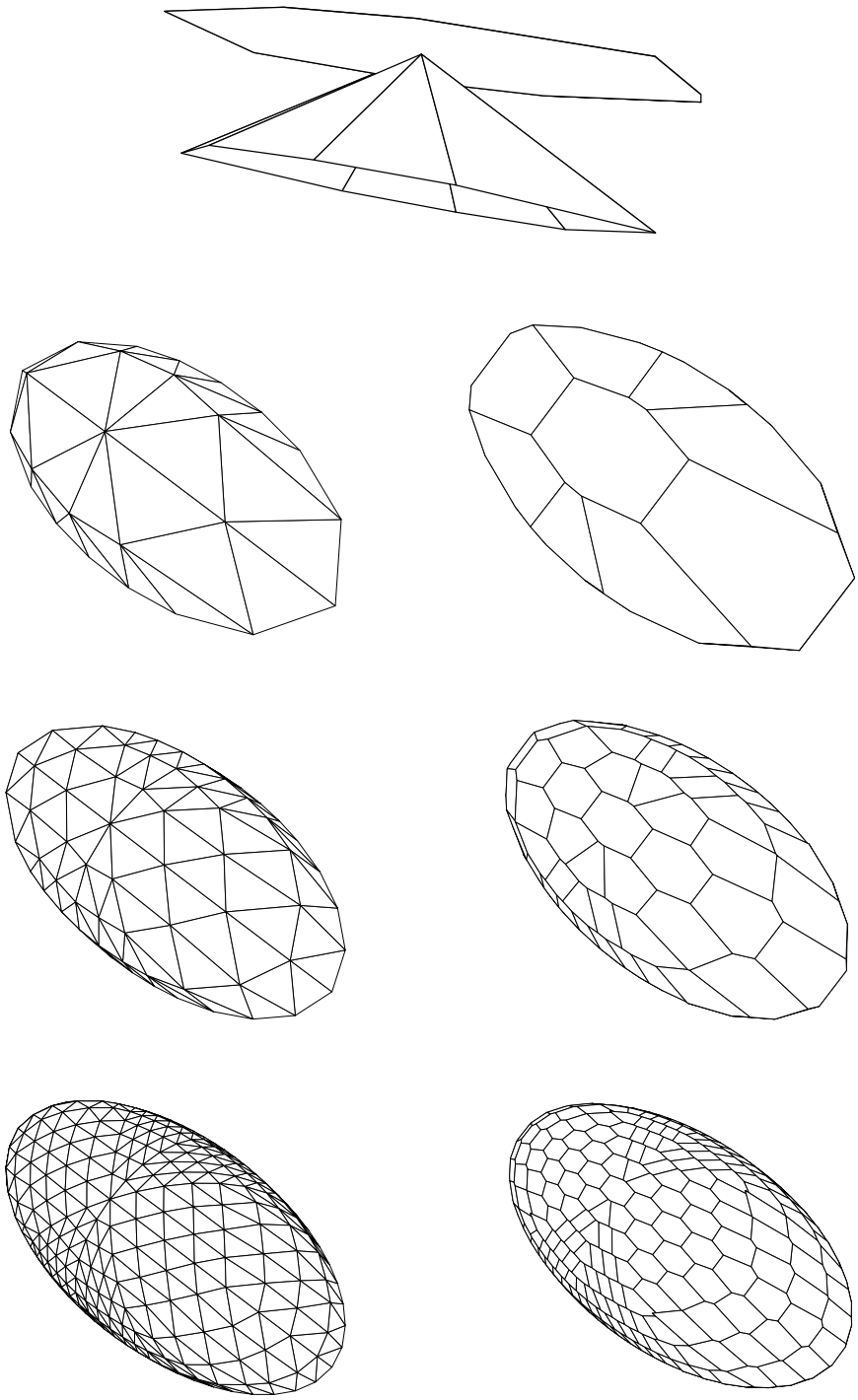


Figura 6.5: Un elipsoide triangulado a diferentes niveles de detalle (izquierda) y la aproximación triédrica correspondiente (derecha).

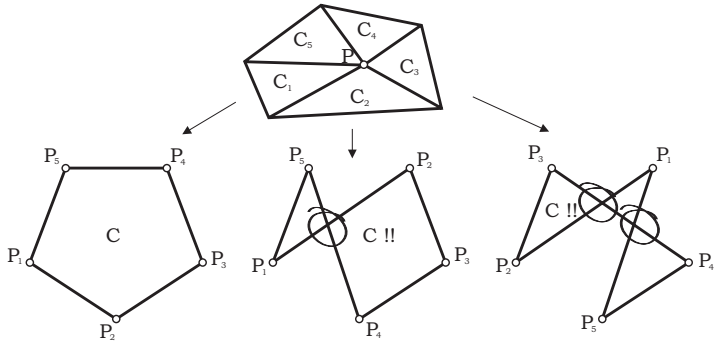



Figura 6.6: El orden en el que se encuentran los triángulos de la triangulación en la configuración polar no implica, necesariamente, un orden análogo (horario o antihorario) de vecindad entre sus vértices correspondientes.

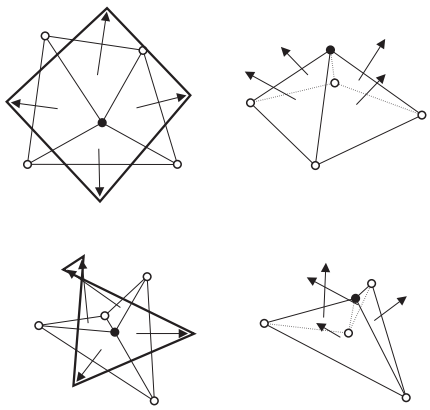


Figura 6.7: Generación de autointersecciones.

# Conclusiones y trabajo futuro

*"What we know is not much. What we do not know is immense."*

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)
(De Morgan's Budget of Paradoxes)

En el campo de los gráficos por ordenador, el modelado de superficies 3D se lleva a cabo, principalmente, mediante el uso de triangulaciones. La sencillez y buenas propiedades de este tipo de mallas las avala como una de las herramientas por excelencia. Sin embargo, algunos trabajos recientes [Ros y col., 2003, Ros y col., 2002] hacen referencia a un tipo alternativo de mallas poligonales, las triedrizaciones. Entre sus propiedades podemos destacar la capacidad para capturar y resumir la información necesaria para describir una superficie 3D. El objetivo de este trabajo ha sido, justamente, proporcionar algoritmos que permitan construir triedrizaciones de superficies. Dos han sido los métodos presentados.

El primero de ellos, expuesto en la Parte I, está basado en las propiedades de los diagramas de Voronoi 3D. En el Capítulo 1 se ha hecho una breve introducción a dicha estructura geométrica, haciendo un repaso de las propiedades más destacadas de cara a su aplicación en este trabajo. En el Capítulo 2 se ha presentado el primer algoritmo de triedrización propuesto que utiliza la regularidad en el grado de los vértices que posee un diagrama de Voronoi 3D para obtener, mediante la eliminación de determinadas caras, estructuras quasitriédricas que aproximan una superficie paramétrica dada. El posterior refinado de estas estructuras proporciona la triedrización deseada, dando lugar a un algoritmo cuya complejidad global es de $\mathcal{O}(n \log n)$. En general, el método funciona de forma correcta y presenta el único inconveniente de que el vector normal a la superficie original queda mal aproximado por el vector normal de la triedrización resultante en algunos puntos de ésta.

Inspirándose en la dualidad estructural que existe entre triangulaciones y triedrizaciones, la segunda parte de la memoria presenta un método de triedrización basado en el fenómeno de la dualidad, propio de los espacios proyectivos. Así, en el Capítulo 3, se presentan los conceptos de dualidad y de transformación dual, entrando con más detalle en el estudio de las polaridades, uno de los ejemplos más significativos de transformaciones duales. A continuación, en el Capítulo 4, la generalización de los conceptos lineales nos permite obtener una definición de superficie dual de una superficie dada. Además, bajo ciertas condiciones, el cálculo de envolventes permite obtener dichas superficies de

forma efectiva. En el Capítulo 5 se muestra un ejemplo de ello al aplicar dicho cálculo para obtener la descripción general de la superficie dual de una superficie de Bézier dada. Finalmente, basándose en las técnicas desarrolladas en los capítulos 3, 4 y 5, el Capítulo 6 presenta el segundo método de triedrización. En este caso, la utilización de herramientas tan innatas del espacio proyectivo dificulta, en parte, que el resultado final del algoritmo sea exactamente el deseado, si bien se verifican muchas de las propiedades requeridas en una triedrización.

La Tabla 6.8 muestra, a modo de resumen, las características más importantes de ambos métodos, comparándolas asimismo con las de una triangulación. En la tabla, $S$ denota la superficie a aproximar.

| **Métodos de Poligonización de Superficies** | | | |
|---|---|---|---|
| Característica a comparar | Tried. mediante diag. Voronoi | Tried. mediante polaridad | Triangulación genérica |
| *Representaciones admitidas para S* | Triangulación, Parametrización | Parametrización | Triangulación, Parametrización, Implícita, etc |
| *¿Obtiene una poligonización?* | Sí | No | Sí |
| *Grado en los vértices interiores* | 3 | 3 | Arbitrario |
| *Convergencia hacia S* | Sí | Sí | Sí |
| *Convergencia hacia la normal a S* | No | Sí | Sí |

Figura 6.8: Tabla comparativa de métodos de poligonización.

La primera fila de la tabla anterior presenta el tipo de *input* posible en cada caso. Aquí, la supremacía de las triangulaciones es evidente al ser una herramienta ya veterana en el campo. La segunda fila nos informa sobre la estructura de la aproximación obtenida, indicando en cada caso si ésta es o no una poligonización, tal y como se definió en la Introducción. Aquí, las triangulaciones no presentan problema alguno pues tres vértices siempre determinan un polígono plano sin autointersecciónes. También se obtienen aproximaciones poligonales libres de autointersecciones al utilizar el método de triedrización basado en diagramas de Voronoi. Sin embargo, esto no se puede asegurar en las triedrizaciones obtenidas mediante polaridad, donde, pese a obtener polígonos planos para las caras, la posible aparición de autointersecciones entre sus aristas, las excluye del conjunto de las poligonalizaciones. La siguiente fila muestra el grado en los vértices interiores de la aproximación y que constituye el rasgo diferenciador entre triedrizaciones y triangulaciones. Finalmente, las dos últimas filas muestran lo satisfactoria que puede o no ser la aproximación obtenida en lo referente a la precisión con la que esta aproxima tanto los

puntos de la superficie original como los vectores normales de la misma, respectivamente. Además, el "No" que aparece en la tabla, referente a la aproximación de los vectores normales mediante una triedrización usando diagramas de Voronoi, también indica que sucesivos refinamientos de una malla triédrica obtenida mediante este método no comporta, necesariamente, una sucesión de mejoras en la aproximación de las normales que converja a la del modelo a aproximar.

Hemos de notar que tanto de los trabajos anteriores consultados como de los resultados obtenidos en este proyecto se desprende una característica importante del problema tratado: una mayor resistencia, a efectos de su triedrización, de las zonas donde hay puntos de ensilladura. Esto nos enfoca, en un futuro, a un tratamiento más local del problema que, esquemáticamente, podría ser el siguiente:

- **Localización y clasificación.**
  Localizar los diferentes tipos de puntos de la superficie que pretendemos triedrizar. El nivel de detalle es algo que se deberá estudiar y/o determinar empíricamente. Un ejemplo de resultados en esta linea se muestra en [Takagi y col., 1998] donde se presenta una estrategia de etiquetado de regiones de una superficie en función del tipo de puntos que contiene como a aplicación a un método de detección de curvaturas a partir de una muestra de puntos de una superficie funcional. A continuación se construye una partición en parches de la superficie a triedrizar en la que se clasifican las diferentes patologías en función del tipo de puntos existentes.

- **Triedrización local.**
  Triedrizar cada pedazo de forma independiente. De este modo hemos dividido el problema en subproblemas de dificultades diferentes y, asimismo, como mucho, de igual coste que en el problema original. Observemos que ahora cada pedazo es homogéneo en cuanto a su permisibilidad para ser triedrizado. Es decir, cada parche tiene una dificultad concreta para ser triedrizado y no depende de ninguna zona específica de éste puesto que todos sus puntos comparten las mismas propiedades como elementos del pedazo de superficie. En consecuencia, habrá trozos fáciles de triedrizar (Ej. parches concavos) y otros cuyo tratamiento requerirá de soluciones más elaboradas.

Así pues, la balanza parece equilibrarse, es decir, resultados potentes en cuanto al ahorro de espacio de almacenamiento, meta que también persiguen métodos y técnicas como la multirresolución, se ven compensados con un importante trabajo de preproceso de los datos encaminados a obtener la triedrización de la superficie en cuestión.

Por otra parte, son varias las lineas de trabajo que se abren para el futuro:

1. **Eliminación de autointersecciones en la triedrización por polaridad.** En el Capítulo 6 hemos visto que al despolarizar una triangulación del parche polar, la triedrización obtenida puede tener caras que se autointersecan. En este sentido, cabe preguntarse, en primer lugar, si sería posible encontrar una triangulación donde tal fenómeno no se manifieste. Por ejemplo, se ha visto que cuando todas las aristas de la triangulación son convexas, estas autointersecciones no aparecen. ¿Qué propiedades

debe cumplir en general una triangulación para que su correspondiente triedrización carezca de autointersecciones? Este punto requiere más atención en trabajos futuros.

En segundo lugar y ligado con lo anterior, sería conveniente profundizar más en las propiedades afines y euclídeas de las polaridades, y en general, de las transformaciones de dualidad. El objetivo sería estudiar que efecto tiene este tipo de transformaciones en los elementos de un espacio afín o euclídeo y tratar de determinar si es posible aprovechar o controlar algunos comportamientos para su utilización en un entorno diferente al espacio proyectivo.

2. **Elección de la polaridad adecuada.** Como se comentó, la elección de la polaridad más adecuada para aproximar una superficie es una cuestión pendiente, si bien es cierto que una solución provisional, al tiempo que razonable, consistiría en escoger aquella polaridad cuya cuádrica asociada aproximara mejor la superficie en consideración. Esta sería una solución que evitaría gran parte de los comportamientos no deseados relacionados con elementos que se van al infinito. En esta línea, en [Froumentin, 1995] se expone una forma de obtener aproximaciones de superficies algebraicas complejas mediante pedazos de superficies más simples. En particular, es posible realizar dicho proceso utilizando pedazos de cuádricas.

3. **Flexibilidad de una malla triédrica.** Las triedrizaciones constituyen un tipo de aproximaciones de gran rigidez, esto es, la deformabilidad de una malla triédrica es muy reducida en comparación con las posibilidades que presenta una malla triangular. Esto hecho tiene relación directa con la propiedad que permite la compresión de los datos; dadas cuatro alturas y las coordenadas planas de todos los vértices, la reconstrucción es única. Un trabajo interesante consistiría en definir un conjunto de operaciones de modificación o edición local para las triedrizaciones, característica que también poseen las triangulaciones. De este modo, las mallas triédricas ganarían más versatilidad/manejabilidad.

4. **Profundización del cálculo de envolventes.** Asimismo, es deseable un estudio más detallado del concepto de envolvente. Por ejemplo, queda pendiente dar una caracterización profunda del conjunto de superficies que se pueden obtener a partir de su fibrado tangente. En este sentido, sería conveniente explorar más amplia y profundamente el cálculo de envolventes desde la perspectiva de la Geometría Diferencial y, seguramente, teniendo muy en cuenta también la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Un buen punto de partida puede proporcionarlo [Bruce y Giblin, 1984] que, aunque poco extenso, ofrece un bello tratamiento geométrico-diferencial.

5. **Errores de reconstrucción.** Finalmente, el proceso de reconstrucción de mallas triédricas a partir de sus proyecciones merece dos consideraciones.

   En primer lugar, la propagación de alturas conlleva también una propagación del error de reconstrucción. En [Ros y col., 2003] se muestran ejemplos del crecimiento de este error al aplicar dicho esquema de propagación a una triedrización concreta. Una posible solución a este problema consistiría en especificar la altura no sólo de cuatro, sino de más puntos de la poligonización, de manera que la triedrización quede dividida en regiones, cada una con cuatro puntos de altura conocida que

permitan reconstruirla localmente con un error inferior a una cota especificada. En este sentido, sería necesario optimizar tanto la cantidad como la posición de dichos puntos.

En segundo lugar y aunque no se haya mencionado de forma directa, es muy probable que aparezcan puntos con altura sobrerrestringida por el proceso de propagación. El fenómeno aparece cuando, en dicho proceso, la altura de un punto $P$ queda determinada por dos o más caminos de propagación distintos. Si la proyección utilizada para realizar la reconstrucción proviene de una malla triédrica correcta y no contiene errores, entonces la altura teórica de $P$, obtenida por cada camino, coincidiría en todos ellos. Sin embargo, dicha coincidencia no se daría al usar una proyección incorrecta o con errores. En este caso se tendría que recurrir a algoritmos de corrección que permitieran modificar la estructura de una proyección, de reconstrucción imposible, para obtener reconstrucciones factibles [Ros, 2000].

Si bien iniciamos el trabajo abordando una objetivo de enunciado simple, los diversos aspectos surgidos muestran que la resolución del mismo ha escapado a lo que nuestra capacidad de extrapolación pudo augurar. Esperemos que el trabajo invertido pueda constituir, entre otros usos, un punto de partida para posteriores profundizaciones de la materia tratada.

# Anexo

## Algunos Conceptos y Resultados Básicos de Geometría Proyectiva.

**Cuadrángulo.** Configuración de cuatro puntos diferentes $P$, $Q$, $R$, $S$ de manera que la variedad lineal $\pi = P \vee Q \vee R \vee S$ generada por ellos tiene dimensión dos y, además, nunca tres de ellos son colineales. Decimos que $P$, $Q$, $R$, $S$ son los *vértices* del cuadrángulo. Las rectas determinadas por las seis posibles parejas de vértices se llaman *lados* del cuadrángulo y dos lados se dicen opuestos si no tienen ningún vértice en común (ver Figura 6.9a). Los tres puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos (*puntos diagonales*) forman el *triángulo diagonal* del cuadrángulo.

**Conjugación armónica.** Cuatro puntos colineales $A$, $B$, $C$, $D$ se dice que forman un *conjunto armónico* si existe un cuadrángulo de manera que dos de sus lados opuestos pasan por $A$ y otros dos lados opuestos por $B$, mientras que el resto de lados cortan la recta $AB$ en $C$ y $D$, respectivamente. Decimos que $C$ y $D$ son *conjugados armónicos* (uno del otro) respecto de $A$ y $B$ y lo denotamos $\mathcal{H}(AB, CD)$. Para construir $D$ a partir de $A$, $B$ y $C$ consideremos cualquier triángulo $PQR$ cuyos lados $QR$, $RP$, $PQ$ pasen por $A$, $B$ y $C$ respectivamente. Esto determina un cuadrángulo $PQRS$, donde $S = AP \cap BQ$ como se muestra en la Figura 6.9. Por tanto $D = RS \cap AB$ es el punto buscado. Además, se puede ver que esta construcción no depende de la elección del triángulo $PQR$ [Coxeter, 1993]. Recordemos que, analíticamente, decimos que una cuaterna de puntos alineados es armónica si la razón doble de ellos es $\rho = \rho(A, B, C, D) = -1$ o, equivalentemente, si $\rho(A, B, C, D) = \rho(A, B, D, C)$ [Xambó, 1997]. Finalmente, es posible definir la razón doble de cuatro rectas, cuatro planos y en general, de cuatro hiperplanos [Xambó, 1997]. En el plano proyectivo real, por ejemplo, se define la razón doble de cuatro rectas $r_1, r_2, r_3, r_4$ concurrentes en el punto $V$ como $\rho(r_1, r_2, r_3, r_4) = \rho(r_1 \cap l, r_2 \cap l, r_3 \cap l, r_4 \cap l)$, donde $l$ es cualquier recta no incidente con $V$. De este modo, es posible extender la definición de cuaterna armónica a rectas, planos y, en general, a hiperplanos de un espacio proyectivo.

**Colineaciones.** Una transformación $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$ es una *colineación* si es biyectiva y transforma puntos alineados en puntos alineados. Sin embargo, cuando $n = 1$ la definición anterior no es válida. En este caso la definición adoptada es la que impone que cuaternas armónicas se transformen en cuaternas armónicas. Analíticamente, si $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$, donde $E$ es un $k$-espacio vectorial de dimensión $n + 1$, las colineaciones se

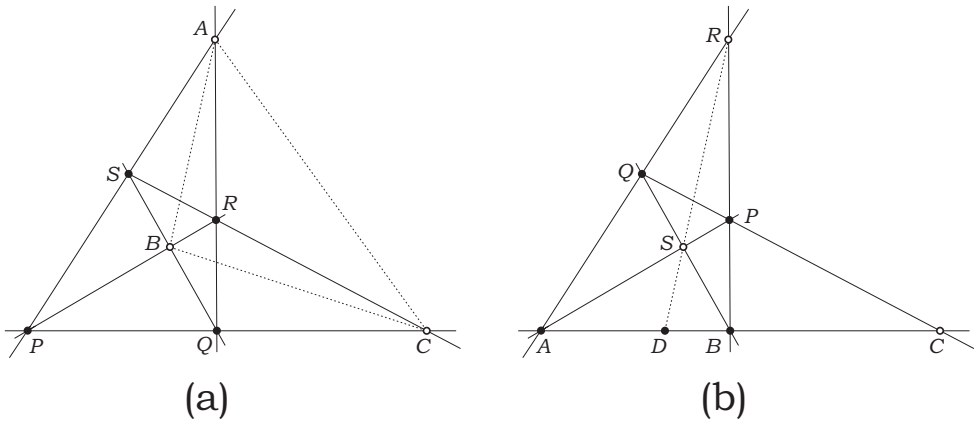



Figura 6.9: (a) Cuadrángulo y su triángulo diagonal $ABC$. (b) Construcción del cuarto armónico.

describen en términos de $E$ como las aplicaciones $\varphi = [f] : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, donde $f : E \longrightarrow E$ es un automorfismo semilineal, es decir, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ y $f(\lambda x) = \lambda^\sigma f(x)$, siendo $\sigma : k \longrightarrow k$ $(\lambda \mapsto \lambda^\sigma)$ un automorfismo del cuerpo $k$. Notemos que si el único automorfismo de $k$ es $\sigma = id$, entonces $f$ es una aplicación lineal y en este caso decimos que $\varphi = [f]$ es una *proyectividad* o, más concretamente, una *homografía* de $\mathbb{P}^n$ [Xambó, 1997]. Esto es lo que ocurre cuando $k = \mathbb{R}$ [Xambó, 1997], de modo que podemos hablar indistintamente de colineaciones de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ o de homografías de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

**Clasificación de las homografías de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.** Decimos que una homografía de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ es parabólica, hiperbólica o elíptica si el número de puntos invariantes es uno, dos o ninguno, respectivamente. Si el número de puntos invariantes es mayor de dos, entonces necesariamente la homografía es la identidad [Coxeter, 1993, pág. 40].

**Involuciones de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.** Una involución en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ es una homografía de periodo dos, es decir, $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tal que para todo punto $P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ se cumple que $\varphi(\varphi(P)) = P$. En otras palabras $\varphi = \varphi^{-1}$. El lector podrá consultar la demostración de los siguientes resultados en [Coxeter, 1993]:

> **Proposición.** *Una homografía de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ que intercambia dos puntos es necesariamente una involución.*
>
> **Corolario.** *Una involución queda determinada por dos pares cualquiera de puntos correspondientes.*
>
> **Proposición.** *Si una involución tiene un punto invariante, entonces ha de tener un segundo punto invariante y la involución es justamente la correspondencia entre conjugados armónicos respecto a estos dos puntos.*

**Primer teorema fundamental de la Geometría Proyectiva.** *Si $\mathbb{P}$ es un espacio proyectivo de dimensión $n \geq 3$ o un plano que cumple el teorema de Desargues, entonces existe un cuerpo $k$ (no necesariamente conmutativo) y un $k$-espacio vectorial $E$ de dimensión finita tales que el espacio proyectivo es isomorfo a $\mathbb{P}(E)$. Es decir, existe una colineación entre el espacio proyectivo y el proyectivizado del espacio vectorial $E$.*

# Bibliografía


[Amenta y col., 1998] Amenta, N., Bern, M., y Kamvysselis, M. (1998). A New Voronoi-Based Surface Reconstruction Algorithm. En *SIGGRAPH'98*, pp. 415–421.

[Andújar, 1999] Andújar, C. (1999). *Octree-based Simplification of Polyhedral Solids.* Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

[Barber y col., 1996] Barber, C. B., Dobki, D. P., y Huhdanpaa, H. (1996). The Quickhull Algorithm for Convex Hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 22:pp. 469–483.

[Bertini, 1951] Bertini, E. (1951). *Complementos de Geometría Proyectiva.* Encyclopedia of mathematics and its applications. Ed. Aguilar.

[Boltianski, 1977] Boltianski, V. (1977). *La Envolvente.* Editorial MIR Moscu.

[Boothby, 1986] Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, volumen 120 de *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc, segunda edición.

[Boyer, 1994] Boyer, C. (1994). *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos.

[Bruce y Giblin, 1984] Bruce, J. y Giblin, P. (1984). *Curves and Singularities.* Cambridge University Press.

[Cox y col., 1992] Cox, D., Little, J., y O'Shea, D. (1992). *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Springer-Verlag.

[Coxeter, 1957] Coxeter, H. (1957). *Non-Euclidean Geometry.* Mathematical Expositions.

[Coxeter, 1971] Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría.* Limusa.

[Coxeter, 1993] Coxeter, H. (1993). *The Real Projective Plane.* Springer-Verlag New York, Inc.

[Coxeter, 1998] Coxeter, H. (1998). *Projective Geometry.* Springer Verlag.

[Coxeter y Greitzer, 1983] Coxeter, H. y Greitzer, S. (1983). *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America.

[de Berg y col., 1997] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmanrs, M., y Schwarzkopf, O. (1997). *Computational Geometry. Algorithms and Applications.* Springer-Verlag.

[Deddi, 1997] Deddi, H. (1997). *Geometric Duality and Relationship Between Primal and Dual Curves.* Tesis Doctoral, LMC-IMAG laboratorio de Grenoble.

[Delingette, 1994] Delingette, H. (1994). Simplex Meshes: a General Representation for 3d Shape Reconstruction. Robotique, image et vision Rapport de recherche n. 2214, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis.

[do Carmo, 1990] do Carmo, M. P. (1990). *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies.* Alianza Universidad Textos, primera edición.

[Edelsbrunner, 1987] Edelsbrunner, H. (1987). *Algorithms in Combinatorial Geometry.* Springer-Verlag.

[EncMat, 1994] EncMat (1994). Enciclopedia de las matemáticas. Ed. Mir, volumen 2, 4 y 8.

[Farin, 1997] Farin, G. (1997). *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide.* Academic Press, cuarta edición.

[Farin, 1999] Farin, G. E. (1999). *From Projective Geometry to Practical Use.* Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, segunda edición.

[Farouki y Rajan, 1987] Farouki, R. y Rajan, V. (1987). On the Numerical Condition of Polynomials in Bernstein Form. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4:pp. 191–216.

[Farouki y Rajan, 1988] Farouki, R. y Rajan, V. (1988). Algorithms for Polynomials in Bernstein Form. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 5:pp. 1–26.

[Fox y Joy, 1998] Fox, D. E. y Joy, K. I. (1998). On Polyhedral Approximations to a Sphere. En *Proceedings of the Computer Graphics International Conference*, pp. 426–432.

[Froumentin, 1995] Froumentin, M. (1995). Degree Reduction of Algebraic Surfaces. Trabajo no publicado. Disponible en http://citeseer.nj.nec.com/18598.html.

[Goldman, 1995] Goldman, R.Ñ. (1995). *Graphics Gems*, volumen IV, capítulo Identities for the Univariate and Bivariate Bernstein Basis Functions, pp. 149–162. Academic Press.

[Hodge y Pedoe, 1994] Hodge, W. y Pedoe, D. (1994). *Methods of Algebraic Geometry.* Cambridge University Press.

[Hoschek, 1983] Hoschek, J. (1983). Dual Bézier Curves and Surfaces. En *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pp. 147–156. North-Holland Publishing Company.

[Hoschek, 1984] Hoschek, J. (1984). Detecting Regions with Undesirable Curvature. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 1:pp. 183–192.

[Kadison y Kromann, 1996] Kadison, L. y Kromann, M. (1996). *Projective Geometry and Modern Algebra.* Birkhäuser.

[Kiseliov y col., 1979] Kiseliov, A., Krasnov, M., y Makarenko, G. (1979). *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ed. Mir.

[Klein, 1939] Klein, F. (1939). *Geometry. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. Dover Publications, INC.

[Magillo, 1999] Magillo, P. (1999). *Spatial Operations on Multiresolution Cell Complexes*. Tesis Doctoral, Università di Genova.

[Okabe y col., 2000] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., y Chiu, S.Ñ. (2000). *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, LTD.

[O'Rourke, 1994] O'Rourke, J. (1994). *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, primera edición.

[Piegl y Tiller, 1997] Piegl, L. y Tiller, W. (1997). *The NURBS Book*. Springer-Verlag, segunda edición.

[Preparata y Shamos, 1985] Preparata, F. y Shamos, M. (1985). *Computational Geometry. An Introduction*. Springer-Verlag.

[Ros, 2000] Ros, L. (2000). *A Kinematic-Geometric Approach to Spatial Interpretation of Line Drawings*. Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

[Ros y col., 2002] Ros, L., Sugihara, K., y Thomas, F. (2002). Shape Representation Using Trihedral Mesh Projections. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2301:pp. 209–219.

[Ros y col., 2003] Ros, L., Sugihara, K., y Thomas, F. (2003). Towards Shape Representation Using Trihedral Mesh Projections. *The Visual Computer*, vol. 19(n. 2-3):pp. 139–150.

[Rutter, 2000] Rutter, J. W. (2000). *Geometry of Curves*. Chapman&Hall/CRC.

[Saito y col., 1995] Saito, T., Wang, G.-J., y Sederberg, T. W. (1995). Hodographs and Normals of Rational Curves and Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 12:pp. 417–430.

[Samuel, 1988] Samuel, P. (1988). *Projective Geometry*. Springer Verlag.

[Schreier y Sperner, 1961] Schreier, O. y Sperner, E. (1961). *Projective Geometry of n Dimensions. Volume Two of Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, volumen 2. Chelsea Publishing Company.

[Sederberg y Wang, 1987] Sederberg, T. W. y Wang, X. (1987). Rational Hodographs. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4:pp. 333–335.

[Segre, 1961] Segre, B. (1961). *Lectures on Modern Geometry*. Edizioni Cremonense.

[Seibold y Wyvill, 1998] Seibold, W. y Wyvill, G. (1998). Towards an Understanding of Surfaces Through Polygonization. pp. 416–425.

[Semple y Kneebone, 1963] Semple, J. y Kneebone, G. (1963). *Algebraic Projective Geometry*. Oxford at the Clarendon Press.

[Takagi y col., 1998] Takagi, J., Belyaev, A. G., y Kunii, T. L. (1998). Visualization of Noh Mask Curvature Features. En *Computer Graphics International*, pp. 572–574.

[Wang y col., 1997] Wang, G.-J., Sederberg, T. W., y Saito, T. (1997). Partial Derivatives of Rational Bézier Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14(n. 4):pp. 377–381.

[Xambó, 1997] Xambó, S. (1997). *Geometría*. Edicions UPC.